Programme de colle – MP 1

Ensembles dénombrables, familles sommables

Contenus	Capacités & commentaires
Ensembles dénombrables	
Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.	Les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables.
Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable. Les ensembles $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.	Démonstrations non exigibles.
L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.	Démonstration non exigible.
Familles sommables	
Famille sommable de réels positifs indexée par un ensemble dénombrable. Somme.	La famille $(u_i)_{i\in I}$ est dite sommable si l'ensemble des sommes $\sum_{i\in F} u_i$ où F décrit l'ensemble des parties finies de I est majoré ; dans ce cas, la somme de la famille $(u_i)_{i\in I}$ est la borne supérieure de l'ensemble précédent. Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, sa somme est $+\infty$. Dans tous les cas, la somme est notée $\sum_{i\in I} u_i$.
Théorème de sommation par paquets : si $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de I et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs, alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si : — Pour tout entier n la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable. — La série $\sum\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$ converge. Dans ce cas : $$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right).$$	Démonstration hors programme.
Famille sommable de nombres complexes indexée par un ensemble dénombrable	La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si la famille $(\lvert u_i\rvert)_{i\in I}$ l'est.
Somme d'une telle famille.	Pour une famille de réels, on se ramène à ses parties positive et négative.
Lorsque $I = \mathbb{N}$, lien avec la convergence absolue de la série $\sum u_n$.	
Invariance de la sommabilité et de la valeur de la somme par permutation de l'ensemble des indices.	Démonstration non exigible.
Linéarité de la somme.	
Théorème de sommation par paquets.	Démonstration hors programme. On vérifie l'hypothèse de sommabilité en appliquant le théorème de sommation par paquets à la famille $(\lvert u_i\rvert)_{i\in I}$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Applications des familles sommables	
La famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ de réels positifs est sommable si et seulement si pour tout n, la série $\sum a_{m,n}$ converge et la série $\sum\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right)$ converge. Si tel est le cas $$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}\right).$$	
Si la famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ de nombres complexes est sommable, alors : $$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}.$$	On vérifie l'hypothèse de sommabilité en appliquant l'énoncé précédent à la famille $(\lvert a_{m,n}\rvert)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$.
Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.	

Séries entières (début)

Extrait du programme officiel :

Les coefficients des séries entières considérées sont réels ou complexes.

Contenus	Capacités & commentaires
Généralités	
Série entière. Lemme d'Abel : si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $\lvert z\rvert < \lvert z_0\rvert$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.	
Rayon de convergence d'une série entière.	Disque ouvert de convergence ; intervalle ouvert de convergence.
La convergence est normale sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon strictement inférieur à R ; la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement pour tout z tel que $\lvert z\rvert > R$. Si $a_n = O(b_n)$, $R_a \geqslant R_b$. Si $a_n \sim b_n$, $R_a = R_b$. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence. Utilisation de la règle de d'Alembert.	
Continuité de la somme d'une série entière sur le disque ouvert de convergence.	L'étude des propriétés de la somme au bord du disque ouvert de convergence n'est pas un objectif du programme.
Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.	
b) Série entière d'une variable réelle	
Primitivation d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence. La somme d'une série entière est de classe C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.	

Les DSE des fonctions usuelles ne seront vus qu'en début de semaine.
Semaine prochaine : Séries entière (suite). Probabilités.

Questions de cours :

(i) Dénombrabilité de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$ (on peut se contenter d'une preuve graphique), $\mathbb{Q}$.

(ii) Non dénombrabilité de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

(iii) Une suite de réels positifs est sommable si et seulement il s'agit du terme général d'une série convergente.

(iv) Énoncé précis parmi les théorèmes au programme : sommation par paquets (avec des termes réels positifs ou non), commutativité des termes d'une somme d'une famille sommable, théorème de Fubini pour les séries doubles, produit de Cauchy.

(v) Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
Effet des comparaisons asymptotiques ($\leqslant$, o, O, $\sim$) sur le rayon de convergence.

(vi) Convergence normale sur tout disque fermé inclus dans le disque ouvert de convergence.

(vii) Somme de deux séries entières.

(viii) Produit de Cauchy de deux séries entières.
Exemple le produit a un rayon de convergence strictement plus grand que le minimum des rayons de convergence des deux séries entières, pourtant différents.

(ix) **CCINP 15** : Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

(a) Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.

(b) Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.

(c) La série de fonctions $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$?

(x) **CCINP 18** : On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$. On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

(a) Étudier la convergence simple de cette série.
On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.

(b) i. Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.

ii. La fonction S est-elle continue sur D ?

(xi) **CCINP 20** :

(a) Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.

(b) Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

i. $\sum \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$. ii. $\sum n^{(-1)^n} z^n$. iii. $\sum \cos(n) z^n$.

(xii) **CCINP 21** :

(a) Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.

(b) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.

(c) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?

(xiii) **CCINP 23** : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.

(a) Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1) a_{n+1} x^n$ ont le même rayon de convergence.
On le note R.

(b) Démontrer que la fonction $x \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]-R, R[$.