chapitreXXI

Polynômes d'endomorphismes et de matrices, application à la réduction

Dans tout le chapitre, $(E,+,\cdot)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

I Polynômes d'endomorphisme et de matrices

1 Rappels

On a vu que si $u \in \mathscr{L}(E)$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $P = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on définit

- $P(u) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k u^k = a_0 \operatorname{id}_E + a_1 u + \cdots + a_p u^p$
- $P(A) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k A^k = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_p A^p$
- $\Phi_u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ P & \longmapsto & P(u) \end{array} \right.$ morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.
- $\Phi_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ P & \longmapsto & P(A) \end{array} \right.$ morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.

Notation

On note $\mathbb{K}[u] = \operatorname{Im}\Phi_u = \{P(u),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$ et $\mathbb{K}[A] = \operatorname{Im}\Phi_A = \{P(A),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$.

Propriété

$\mathbb{K}[u] = \operatorname{Vect}\left(u^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\mathbb{K}[A] = \operatorname{Vect}\left(A^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des sous-algèbres commutatives de $\mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ respectivement.

2 Propriétés

Propriété

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $P(Q^{-1}AQ) = Q^{-1}P(A)Q$.

Propriété

Si $D = \operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ et $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, alors

(i) $P(D) = \operatorname{diag}(P(\lambda_1),\dots,P(\lambda_n))$

(ii) $P(T) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$

3 Polynômes annulateur

a Définition

Définition

P est un **polynôme annulateur** de u (respectivement A) lors $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ (respectivement $P(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$.

Propriété

(i) Si E est de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$, il existe au moins un polynôme annulateur non nul de u.

(ii) Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, il existe au moins un polynôme annulateur non nul de A.

Méthode : Calcul de puissances à partir d'un polynôme annulateur

1. On cherche un polynôme annulateur non nul P de A.
2. Pour un polynôme $S \in \mathbb{K}[X]$, on calcule le reste de la division euclidienne de S pour P : $S = PQ + R$ où $\deg R < \deg P$. C'est plutôt facile lorsque P est scindé simple (Interpolation de Lagrange).
3. On en déduit, entre autres, pour $k \in \mathbb{N}$, avec $S = X^k$, $A^k = R(A)$.

Méthode : Montrer l'inversibilité et déterminer l'inverse à partir d'un polynôme annulateur

1. On cherche un polynôme annulateur non nul P de A avec un terme constant non nul.
2. On en déduit une matrice B telle que $AB = I_n$ (ou $BA = I_n$, l'un des deux suffisant) en isolant I_n.
3. Alors A est inversible, d'inverse B qui s'exprime comme un polynôme en A.

b Polynômes annulateurs et valeurs propres

Propriété

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in E$ tel que $f(x) = \lambda x$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k(x) = \lambda^k x$. Plus généralement si $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(u)(x) = P(\lambda)(x)$.

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = \lambda X$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k X = \lambda^k X$. Plus généralement si $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A)X = P(\lambda)X$.

Corollaire

Si λ est valeur propre de u (respectivement A), alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$ (respectivement $P(A)$).

Propriété

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ (respectivement $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) tel que $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ (respectivement $P(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$), $\mathscr{Z}(P)$ l'ensemble des racines de P, alors $\operatorname{Sp} u \subset \mathscr{Z}(P)$ (respectivement $\operatorname{Sp} A \subset \mathscr{Z}(P)$).

L'inclusion est stricte en général.

II Lemme de décomposition des noyaux

Théorème : Lemme de décomposition des noyaux

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P \wedge Q = 1$. Alors $\operatorname{Ker}((PQ)(u)) = \operatorname{Ker}(P(u)) \oplus \operatorname{Ker}(Q(u))$.

Plus généralement, si $P_1, \dots, P_m$ sont deux à deux premiers entre eux, alors $\operatorname{Ker}\left(\left(\prod_{i=1}^{m} P_i\right)(u)\right) = \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{Ker}(P_i(u))$.

Corollaire

(i) Si $P \in \mathbb{K}[X]$, $\operatorname{Ker}(P(u))$ est stable par u.

(ii) Si $P_1, \dots, P_m$ sont deux à deux premiers entre eux, et $P = \prod_{i=1}^{m} P_i$ est un polynôme annulateur de u, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{Ker}(P_i(u))$, la matrice dans une base adaptée est diagonale par blocs.

Propriété : Caractérisation 6

Si E est de dimension fini et $u \in \mathscr{L}(E)$, u est diagonalisable si et seulement si u est annulé par un polynôme scindé à racines simples.

(s'adapte aux matrices)

III Sous-espaces stables par un endomorphisme diagonalisable

Propriété

Si u est diagonalisable, F stable par u et u_F l'endomorphisme induit, alors u_F est diagonalisable.

On a déjà vu que les droites stables par u étaient exactement les droites engendrées par un vecteur propre.

Méthode : Sous-espaces stables par un endomorphisme diagonalisable

Le théorème suivant est hors-programme : il faut le redémontrer lorsqu'on en a besoin.

Théorème

Soit E de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable.

Un sous-espace non nul F de E est stable par u si et seulement s'il existe une base de F formée de vecteurs propres de u.

En effet, si on a une base $(e_1, \dots, e_p)$ de F formée de vecteurs propres, les images de chacun des vecteurs sont encore dans F et F est bien stable par u.

Si, réciproquement, F est stable par u, on peut considérer l'endomorphisme u_F induit par u sur F. Comme u est diagonalisable, u_F l'est aussi et on a une base de F formée de vecteurs propres de u_F donc de u.

On peut donc déterminer des sous-espaces stables soit nuls, soit ayant une base construite à partir de vecteurs propres.

IV Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème : de Cayley-Hamilton

Le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur.

V Polynôme minimal

On suppose E de dimension finie n.

Propriété

*L'ensemble des polynômes annulateurs de $u \in \mathscr{L}(E)$ (respectivement de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ non réduit à $0_{\mathbb{K}[X]}$ appelé **idéal annulateur** de u (respectivement A).*

Définition : Polynôme minimal

On appelle polynôme minimal de u (respectivement de A) l'unique générateur unitaire de cet idéal. On le notera π_u (respectivement π_A).

Propriété

Si A est une matrice représentant l'endomorphisme u, alors $\pi_u = \pi_A$.

Propriété

Si $d = \deg \pi_u$ (respectivement $d = \deg \pi_A$), alors $\left(\mathrm{id}_E, u, \dots, u^{d-1}\right)$ est une base de $\mathbb{K}[u]$ (respectivement $\left(I_n, A, \dots, A^{d-1}\right)$ est une base de $\mathbb{K}[A]$).

Propriété

Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique. En particulier, il est de degré au plus n.

Propriété

*Les racines du polynôme minimal sont **exactement** les valeurs propres.*

Propriété : Caractérisation 7

u est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé simple si et seulement si $\pi_u = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} u} (X - \lambda)$.

(Idem avec les matrices)

Propriété

Si F est stable par u, u_F l'endomorphisme induit, alors π_{u_F} divise π_u.

Propriété

u est trigonalisable si et seulement si u est annulé par un polynôme scindé si et seulement si son polynôme minimal est scindé.

VI Trigonalisation d'un endomorphisme à polynôme minimal scindé

Théorème

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et P polynôme annulateur scindé de u.

Alors on peut trouver des sous-espaces $F_1, \dots, F_p$ de E, stables par u, supplémentaires dans E, tels que sur chaque F_k, l'endomorphisme u_k induit par u soit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent ($u_k = a_k \mathrm{id}_{F_k} + n_k$).

Corollaire

Si u est trigonalisable, on peut trouver d diagonalisable et n nilpotent tels que $u = d + n$ et $nd = dn$.