chapitreXXI

# Polynômes d'endomorphismes et de matrices, application à la réduction

Extrait du programme officiel :

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| **Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée** | |
| Pour $u$ dans $\mathscr{L}(E)$, morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathscr{L}(E)$. Le noyau de ce morphisme est l'idéal annulateur de $u$. Son image est la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ de $\mathscr{L}(E)$. | Pour $M$ dans $\mathbb{K}[X]$, morphisme $P \mapsto P(M)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, idéal annulateur de $M$, sous-algèbre $\mathbb{K}[M]$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. |
| Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, d'une matrice carrée. | Le polynôme minimal est unitaire. |
| Si $d$ est le degré du polynôme minimal de $u$, alors la famille $(u^k)_{0\leqslant k\leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$. | |
| Si $P$ annule $u$, toute valeur propre de $u$ est racine de $P$. | Si $u(x) = \lambda\, x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)\, x$. |
| Théorème de Cayley-Hamilton. | Démonstration non exigible. |
| **Lemme de décomposition des noyaux** | |
| Si $P_1, \dots, P_r$ sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à $P$, alors : $$\mathrm{Ker}\,(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}\left(P_i(u)\right).$$ | |
| **Polynômes annulateurs et diagonalisabilité** | |
| Un endomorphisme $u$ est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme scindé à racines simples annulant $u$, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples. | Traduction matricielle. |
| Polynôme minimal d'un endomorphisme induit. Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit. | |
| **Endomorphismes à polynôme minimal scindé** | |
| S'il existe un polynôme scindé annulant $u$, décomposition de $E$ en somme directe de sous-espaces stables par $u$ sur chacun desquels $u$ induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent. | Traduction matricielle. La décomposition de Dunford et la réduction de Jordan sont hors programme. |

# Table des matières

Dans tout le chapitre, $(E,+,\cdot)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

# I Polynômes d'endomorphisme et de matrices

## 1 Rappels

On a vu que si $u \in \mathscr{L}(E)$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on définit

- $P(u) = \sum_{k=0}^{p} a_k u^k = a_0 \operatorname{id}_E + a_1 u + \cdots + a_p u^p$
- $P(A) = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_p A^p$
- $\Phi_u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ P & \longmapsto & P(u) \end{array} \right.$ morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.
- $\Phi_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ P & \longmapsto & P(A) \end{array} \right.$ morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.

**Remarques**

**R1** – Ne pas confondre le polynôme $P$, l'endomorphisme $P(u)$ et la matrice $P(A)$.

**R2** – $(P(u))(x)$ existe mais pas $P(u(x))$.

**R3** – Si $u \in \mathscr{L}(E)$ et $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.

**R4** – Deux polynômes en $u$ (respectivement $A$) commutent.

**Notation**

On note $\mathbb{K}[u] = \operatorname{Im} \Phi_u = \{P(u),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$ et $\mathbb{K}[A] = \operatorname{Im} \Phi_A = \{P(A),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$.

**Remarque**

Ne pas dire « Soit $P(u) \in \mathbb{K}[u]$ » : il n'y a pas unicité en général ($\Phi_u$ n'est pas injective).
Préférer « Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors $P(u)$... ».

**Propriété**

*$\mathbb{K}[u] = \operatorname{Vect}(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\mathbb{K}[A] = \operatorname{Vect}(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des sous-algèbres commutatives de $\mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ respectivement.*

**Démonstration**

Comme image de morphismes d'algèbres. □

## 2 Propriétés

**Propriété**

*Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $P(Q^{-1}AQ) = Q^{-1}P(A)Q$.*

**Propriété**

*Si* $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *et* $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$ *et* $P \in \mathbb{K}[X]$, *alors*

*(i)* $P(D) = \operatorname{diag}(P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n))$

*(ii)* $P(T) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$

## 3 Polynômes annulateur

### a Définition

**Définition**

$P$ est un **polynôme annulateur** de $u$ (respectivement $A$) lors $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ (respectivement $P(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$.

**Exemples**

**E 1** – Le polynôme nul.

**E 2** – Si $p$ est une projection, $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de $p$.

**E 3** – Si $s$ est une symétrie, $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de $s$.

**Propriété**

*(i) Si* $E$ *est de dimension finie,* $u \in \mathscr{L}(E)$*, il existe au moins un polynôme annulateur non nul de* $u$*.*

*(ii) Si* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$*, il existe au moins un polynôme annulateur non nul de* $A$*.*

**Démonstration**

Si $n = \dim E$, $\left(\mathrm{id}_E, u, u^2, \ldots, u^{n^2}\right)$ (respectivement $\left(I_n, A, \ldots, A^{n^2}\right)$) est liée car $n^2 + 1$ vecteurs en dimension $n^2$. □

**Méthode : Calcul de puissances à partir d'un polynôme annulateur**

1. On cherche un polynôme annulateur non nul $P$ de $A$.
2. Pour un polynôme $S \in \mathbb{K}[X]$, on calcule le reste de la division euclidienne de $S$ pour $P$ : $S = PQ + R$ où $\deg R < \deg P$. C'est plutôt facile lorsque $P$ est scindé simple (Interpolation de Lagrange).
3. On en déduit, entre autres, pour $k \in \mathbb{N}$, avec $S = X^k$, $A^k = R(A)$.

**Méthode : Montrer l'inversibilité et déterminer l'inverse à partir d'un polynôme annulateur**

1. On cherche un polynôme annulateur non nul $P$ de $A$ avec un terme constant non nul.
2. On en déduit une matrice $B$ telle que $AB = I_n$ (ou $BA = I_n$, l'un des deux suffisant) en isolant $I_n$.
3. Alors $A$ est inversible, d'inverse $B$ qui s'exprime comme un polynôme en $A$.

**Exercice**

Si $A^2 - 3A + 2I_n + 0$, calculer les puissances de $A$, vérifier que $A$ est inversible et que exprimer $A^{-1}$ en fonction de $A$ et $I_n$ et vérifier que l'expression des puissances est valable pour des puissances négatives.

### b Polynômes annulateurs et valeurs propres

**Propriété**

*Si $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in E$ tel que $f(x) = \lambda x$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k(x) = \lambda^k x$. Plus généralement si $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(u)(x) = P(\lambda)(x)$.*

*Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = \lambda X$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k X = \lambda^k X$. Plus généralement si $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A)X = P(\lambda)X$.*

**Corollaire**

*Si $\lambda$ est valeur propre de $u$ (respectivement $A$), alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$ (respectivement $P(A)$).*

**Propriété**

*Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ (respectivement $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) tel que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (respectivement $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$), $\mathcal{Z}(P)$ l'ensemble des racines de $P$, alors $\mathrm{Sp}\, u \subset \mathcal{Z}(P)$ (respectivement $\mathrm{Sp}\, A \subset \mathcal{Z}(P)$).*

*L'inclusion est stricte en général.*

**Remarque**

Les valeurs propres sont **parmi** les racines de $P$

**Exemple**

Si $p^2 = p$ alors $\mathrm{Sp}\, p \subset \{0, 1\}$.

**Exercice : CCINP 65**

**Soit $u$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ sur le corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.**

1. **Démontrer que :** $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$, $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$ .
2. (a) **Démontrer que :** $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$, $P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$ .
   (b) **Démontrer que, pour tout** $(P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ **:**

$$(P \text{ polynôme annulateur de } u) \Longrightarrow (PQ \text{ polynôme annulateur de } u)$$

3. **Soit** $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   **Écrire le polynôme caractéristique de $A$, puis en déduire que le polynôme $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de $A$.**

---

1. Soit $(P,Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$.

   $P = \sum_{p=0}^{n} a_p X^p$ et $Q = \sum_{q=0}^{m} b_q X^q$.

   Donc $PQ = \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{m} (a_p b_q X^{p+q})$.

   Donc $(PQ)(u) = \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{m} (a_p b_q u^{p+q})$ (*)

   Or $P(u) \circ Q(u) = \left(\sum_{p=0}^{n} a_p u^p\right) \circ \left(\sum_{q=0}^{m} b_q u^q\right) = \sum_{p=0}^{n} \left(a_p u^p \circ \sum_{q=0}^{m} b_q u^q\right)$.

   Donc, par linéarité de $u$, $P(u) \circ Q(u) = \sum_{p=0}^{n} \left(\sum_{q=0}^{m} a_p u^p \circ b_q u^q\right) = \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{m} (a_p b_q u^{p+q})$. (**)

   D'après (*) et (**), $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
2. (a) Soit $(P,Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$.
   D'après 1., $P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u)$.
   De même, d'après 1., $Q(u) \circ P(u) = (QP)(u)$.
   Or $PQ = QP$ donc $(PQ)(u) = (QP)(u)$.
   On en déduit que $P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.

(b) Soit $(P,Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$.
On suppose que $P$ est annulateur de $u$.
Prouvons que $PQ$ est annulateur de $u$.
D'après 1. et 2.(a), $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$. (***)
Or $P$ est annulateur de $u$ donc $P(u) = 0$ donc, d'après (***), $(PQ)(u) = 0$.
On en déduit que $PQ$ est annulateur de $u$.

3. Notons $P_A(X)$ le polynôme caractéristique de $A$.
$P_A(X) = \det(XI_2 - A)$. On trouve $P_A(X) = X(X-1)$.
Soit $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$.
On remarque que $R(0) = R(1) = 0$ et on en déduit que $R$ est factorisable par $X(X-1)$.
C'est-à-dire : $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ / $R = X(X-1)Q$.
Or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $P_A(X) = X(X-1)$ annule $A$.
Donc, d'après 2.b., comme $R = P_A(X)Q$, $R$ est annulateur de $A$.

# II Lemme de décomposition des noyaux

**Théorème : Lemme de décomposition des noyaux**

*Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P \wedge Q = 1$. Alors $\mathrm{Ker}((PQ)(u)) = \mathrm{Ker}(P(u)) \oplus \mathrm{Ker}(Q(u))$.*
*Plus généralement, si $P_1, \ldots, P_m$ sont deux à deux premiers entre eux, alors* $\mathrm{Ker}\left(\left(\prod_{i=1}^{m} P_i\right)(u)\right) = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}(P_i(u))$.

**Démonstration**

On a $(PQ)(u)(x) = P(u)\big(Q(u)(x)\big) = Q(u)\big(P(u)(x)\big)$. Donc si $P(u)(x) = 0$ ou $Q(u)(x) = 0$, alors $(PQ)(u)(x) = 0$. Donc $\mathrm{Ker}(P(u))$ et $\mathrm{Ker}(Q(u))$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathrm{Ker}((PQ)(u))$.

On a une relation de Bézout : $AP + BQ = 1$. Donc si $x \in \mathrm{Ker}(P(u)) \cap \mathrm{Ker}(Q(u))$, $x = A(u)\big(P(u)(x)\big) + B(u)\big(Q(u)(x)\big) = 0_E$ donc la somme est directe.

Puis tout $x \in \mathrm{Ker}((PQ)(u))$ s'écrit $x = y + z$ avec $y = A(u)\big(P(u)(x)\big)$ et $z = B(u)\big(Q(u)(x)\big)$, et alors $Q(u)(y) = (QAP)(u)(x) = U(u)\big((PQ)(u)(x)\big) = A(u)(0_E) = 0_E$ et $P(u)(z) = (PBQ)(u)(x) = B(u)\big((PQ)(u)(x)\big) = B(u)(0_E) = 0_E$ donc $\mathrm{Ker}((PQ)(u)) = \mathrm{Ker}(P(u)) + \mathrm{Ker}(Q(u))$.

Reste à poser une récurrence, ce qui se fait sans trop de problème en remarquant que si $P_1, \ldots, P_{n+1}$ sont premiers entre eux deux à deux, alors $P_1 \cdots P_{n+1} = (P_1 \cdots P_n)P_{n+1}$ avec $(P_1 \cdots P_n) \wedge P_{n+1} = 1$. □

**Exercice**

Résoudre $y^{(4)} = y$, $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, $u$ opérateur de dérivation.
On cherche donc $\mathrm{Ker}\big((X^4 - 1)(u)\big)$ avec $X^4 - 1 = (X-1)(X+1)\left(X^2+1\right)$.
Les solutions sont les $x \mapsto Ae^x + Be^{-x} + C\cos x + D\sin x$ pour $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

**Exercice : CCINP 93**

**Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$. On notera $\mathrm{Id}$ l'application identité sur $E$.**

1. **Montrer que $\mathrm{Im}\,u \oplus \mathrm{Ker}\,u = E$.**
2. **(a) Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.**
   **(b) En déduire que $\mathrm{Im}\,u = \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$.**
3. **On suppose que $u$ est non bijectif.**
   **Déterminer les valeurs propres de $u$. Justifier la réponse.**

**Remarque : les questions 1. , 2. et 3. peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.**

1. On a $u^3 + u^2 + u = 0$ (*)
Soit $y \in \mathrm{Im}\,u \cap \mathrm{Ker}\,u$.
Alors $\exists x \in E$ tel que $y = u(x)$ et $u(y) = 0$.
Donc, d'après (*), $0 = u^3(x) + u^2(x) + u(x) = \underbrace{u^2(y)}_{=0} + \underbrace{u(y)}_{=0} + y = 0$ .
Donc $y = 0$.
Donc $\mathrm{Ker}\,u \cap \mathrm{Im}\,u = \{0\}$. (1)
De plus, $E$ étant de dimension finie, d'après le théorème du rang, $\dim E = \dim \mathrm{Ker}\,u + \dim \mathrm{Im}\,u$. (2)
Donc, d'après (1) et (2), $E = \mathrm{Ker}\,u \oplus \mathrm{Im}\,u$.

2. (a) Lemme des noyaux pour deux polynômes :
Si $A$ et $B$ sont deux polynômes premiers entre eux, alors $\mathrm{Ker}(AB)(u) = \mathrm{Ker}A(u) \oplus \mathrm{Ker}B(u)$.

(b) On pose $P = X^3 + X^2 + X$. $P$ est un polynôme annulateur de $u$ donc $\mathrm{Ker}P(u) = E$.
$P = X(X^2 + X + 1)$. De plus, $X$ et $X^2 + X + 1$ sont premiers entre eux.
Donc, d'après le lemme des noyaux, $E = \mathrm{Ker}\,u \oplus \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$.

On en déduit que $\dim \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id}) = \dim E - \dim \mathrm{Ker}\,u = \dim \mathrm{Im}\,u$. (3)
Prouvons que $\mathrm{Im}\,u \subset \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$.

Soit $y \in \mathrm{Im}\,u$.
alors $\exists x \in E$ tel que $y = u(x)$.
$(u^2 + u + \mathrm{Id})(y) = (u^3 + u^2 + u)(x) = 0$ d'après (*).
Donc $y \in \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$.
On a donc prouvé que $\mathrm{Im}\,u \subset \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$. (4)
Donc, d'après (3) et (4), $\mathrm{Im}\,u = \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$.

3. $P = X^3 + X^2 + X = X(X^2 + X + 1)$ est un polynôme annulateur de $u$.
Donc si on note $\mathrm{sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de $u$ alors $\mathrm{sp}(u) \subset \{$racines réelles de $P\}$.
Or $\{$racines réelles de $P\} = \{0\}$ donc $\mathrm{sp}(u) \subset \{0\}$. (5)
Or $u$ est non bijectif donc, comme $u$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, $u$ est non injectif.
Donc $\mathrm{Ker}\,u \neq \{0\}$, donc 0 est valeur propre de $u$. (6)
On en déduit, d'après (5) et (6), que $\mathrm{sp}(u) = \{0\}$ .

**Corollaire**

*(i) Si $P \in \mathbb{K}[X]$, $\mathrm{Ker}(P(u))$ est stable par $u$.*

*(ii) Si $P_1, \ldots, P_m$ sont deux à deux premiers entre eux, et $P = \prod_{i=1}^{m} P_i$ est un polynôme annulateur de $u$, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}(P_i(u))$, la matrice dans une base adaptée est diagonale par blocs.*

**Propriété : Caractérisation 6**

*Si $E$ est de dimension fini et $u \in \mathscr{L}(E)$, $u$ est diagonalisable si et seulement si $u$ est annulé par un polynôme scindé à racines simples.*
*(s'adapte aux matrices)*

**Démonstration**

$\Longrightarrow$ Si $u$ est diagonalisable, $E = \bigoplus_{i=1}^{m} E_{\lambda_i}(u) = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{id}_E) = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}\left((X - \lambda_i)(u)\right) = \mathrm{Ker}\left(\prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)(u)\right)$ donc $P = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)$ est un polynôme annulateur scindé simple de $u$.

Ou alors $u$ est représenté par $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix}$ (où chaque valeur propre $\lambda_i$ apparaît $m_{\lambda_i}$ fois) et alors $P(u)$ représenté par $\begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_m) \end{pmatrix} = 0_n$.

$\Longleftarrow$ Si $P = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)$ est un polynôme annulateur scindé simple de $u$, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}\left((X - \lambda_i)(u)\right) = \bigoplus_{i=1}^{m} E_{\lambda_i}(u)$ et $u$ est bien diagonalisable.

□

# III Sous-espaces stables par un endomorphisme diagonalisable

**Propriété**

*Si $u$ est diagonalisable, $F$ stable par $u$ et $u_F$ l'endomorphisme induit, alors $u_F$ est diagonalisable.*

**Démonstration**

Tout polynôme annulateur de $u$ est un polynôme annulateur de $u_F$. □

On a déjà vu que les droites stables par $u$ étaient exactement les droites engendrées par un vecteur propre.

### Méthode : Sous-espaces stables par un endomorphisme diagonalisable

Le théorème suivant est hors-programme : il faut le redémontrer lorsqu'on en a besoin.

**Théorème**

*Soit $E$ de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable.*
*Un sous-espace non nul $F$ de $E$ est stable par $u$ si et seulement s'il existe une base de $F$ formée de vecteurs propres de $u$.*

En effet, si on a une base $(e_1, \dots, e_p)$ de $F$ formée de vecteurs propres, les images de chacun des vecteurs sont encore dans $F$ et $F$ est bien stable par $u$.

Si, réciproquement, $F$ est stable par $u$, on peut considérer l'endomorphisme $u_F$ induit par $u$ sur $F$. Comme $u$ est diagonalisable, $u_F$ l'est aussi et on a une base de $F$ formée de vecteurs propres de $u_F$ donc de $u$.

On peut donc déterminer des sous-espaces stables soit nuls, soit ayant une base construite à partir de vecteurs propres.

**Exercice**

Déterminer les sous-espaces stables par l'application linéaire $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 4 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On commence par diagonaliser $A$ : $\mathrm{Sp}\,A = \{1, -3\}$, $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\right)$, $E_{-3}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$, donc $u$ est bien diagonalisable.

Notons $e_1 = (1,0,1)$, $e_2 = (0,1,-2)$ et $e_3 = (1,1,0)$ et classons les sous-espaces stables par dimensions :

- $\{(0,0,0)\}$ et $\mathbb{R}^3$ sont comme toujours stables par $u$.
- Les droites stables par $u$ sont les droites
  - ⋆ $D(\alpha, \beta) = \mathbb{R}(\alpha e_1 + \beta e_2)$ pour $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ contenues dans $E_1(A)$.
    Pour éviter les redondances, on peut par exemple considérer
    - $D(1,0) = \mathbb{R}e_1 = \mathbb{R}(1,0,1)$ d'équations $\begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$
    - et les droites $D(\alpha, 1) = \mathbb{R}(\alpha, 1, \alpha - 2)$ d'équations $\begin{cases} x = \alpha y \\ z = (\alpha - 2) y \end{cases}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
  - ⋆ $D' = \mathbb{R}(1,1,0) = E_{-3}(A)$ d'équations $\begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$
- Les plans stables par $u$ sont des plans engendrés par des vecteurs propres : il s'agit donc
  - ⋆ $P_1 = E_1(A) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ d'équation $z = x - 2y$.
  - ⋆ $P(\alpha, \beta) = \mathrm{Vect}(\alpha e_1 + \beta e_2, e_3)$ pour $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$.
    De nouveau, on peut éviter les redondances en considérant
    - $P(1,0) = \mathrm{Vect}(e_1, e_3)$ d'équation $x = y + z$
    - pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $P(\alpha, 1) = \mathrm{Vect}(\alpha e_1 + e_2, e_3)$ d'équation $(\alpha - 2)(x - y) = (\alpha - 1)z$.

# IV Théorème de Cayley-Hamilton

**Théorème : de Cayley-Hamilton**

*Le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur.*

**Exemple**

Si $n=2$, $A^2=(\operatorname{tr} A)A-(\det A)I_n$.

**Démonstration**

(Non exigible) Soit $x\neq 0_E$. On veut montrer que $\chi_u(u)(x)=0_E$.

1. On s'intéresse au plus petit sous-espaces vectoriel de $E$ stable par $u$ contenant $x$. Il contient nécessairement tous les $u^k(x)$ pour $k\in\mathbb{N}$. Comme on est en dimension finie, on finit par avoir $u^k(x)\in\operatorname{Vect}\left(x,u(x),\dots,u^{k-1}(x)\right)$.

   Soit $d=\min\left\{k\in\mathbb{N}^*,\ u^k(x)\in\operatorname{Vect}\left(x,u(x),\dots,u^{k-1}(x)\right)\right\}$.

   Alors $u^d(x)\in\operatorname{Vect}\left(x,u(x),\dots,u^{d-1}(x)\right)$ et $\left(x,u(x),\dots,u^{d-1}(x)\right)$ est libre (sinon, l'un s'exprimerait comme combinaison linéaire des précédents ce qui contredit la minimalité).
   De plus, $F=\operatorname{Vect}\left(x,u(x),\dots,u^{d-1}(x)\right)$ est stable par $u$.
2. On cherche $\chi_{u_F}$.

   En écrivant $u^d(x)=\sum_{k=0}^{d-1}a_ku^k(x)$, on a $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)=\begin{pmatrix}0&\dots&\dots&0&a_0\\1&\ddots&&\vdots&\vdots\\0&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0&\vdots\\0&\dots&0&1&a_{d-1}\end{pmatrix}$ dont le polynôme caractéristique s'obtient facilement en développant par rapport à la dernière colonne : $\chi_{u_F}=X^n-a_{d-1}X^{d-1}-\dots-a_1X-a_0$ (cf TD, matrice compagnon).
   Alors $\chi_{u_F}(u_F)(x)=\chi_{u_F}(u)(x)=0_E$. Or $\chi_{u_F}$ divise $\chi_u$ : $\chi_u=Q\times\chi_{u_F}$ donc $\chi_u(u)(x)=Q(u)\circ\chi_{u_F}(u)(x)=\left(Q(u)\right)(0_E)=0_E$.
   Finalement, $\chi_u(u)=0_{\mathscr{L}(E)}$. □

**Démonstration : (Non exigible)**

On peut aussi donner une démonstration utilisant la densité des matrices diagonalisables.

Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, avec $\mathbb{K}$ sous-corps de $\mathbb{C}$. En considérant $A$ à cœfficients complexes, elle est trigonalisable : on a $T\in\mathscr{T}_n(\mathbb{C})$ et $P\in\mathscr{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $A=PTP^{-1}$.

Soit pour $k\in\mathbb{N}$, la matrice $T_k$ obtenue en ajoutant $\frac{i}{2^k}$ au cœfficient diagonal de la ligne $i$ de $T$ et laissant les autres cœfficients inchangés.

Alors à partir d'un certain rang, les cœfficients diagonaux de $T_k$ sont deux à deux distincts, donc $T_k$ est diagonalisable, donc $A_k=PT_kP^{-1}$ l'est aussi.

Mais $T_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}T$ donc, par continuité de $B\mapsto PBP^{-1}$ (linéaire en dimension finie), $A_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}A$ : l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Or le théorème de Cayley-Hamilton est facile pour une matrice diagonalisable : si $A=PDP^{-1}$, $\chi_A(A)=\chi_D(A)=P\chi_D(D)P^{-1}=0$ car les cœfficients diagonaux de $D$ sont justement les racines de $\chi_D=\chi_A$.

Soit pour une matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ quelconque, une suite $(A_k)_k$ de matrices diagonalisables tendant vers $A$.

Alors pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\chi_{A_k}(A_k)=0$.

En remarquant que $\chi:B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\mapsto\chi_B(B)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est continue car les cœfficients de $\chi_B$ sont polynomiaux en ceux de $B$ et les fonctions $B\mapsto B^p$ sont continues car $(B_1,\dots,B_p)\mapsto B1\times\dots\times B_p$ est $p$-linéaire, on tire, en passant à la limite, $\chi_A(A)=0$.

Remarquons qu'il n'y a pas de problème de corps car le polynôme caractéristique de $A$ dans $\mathbb{K}$ est le même que celui dans $\mathbb{C}$. □

# V Polynôme minimal

On suppose $E$ de dimension finie $n$.

**Propriété**

*L'ensemble des polynômes annulateurs de $u \in \mathcal{L}(E)$ (respectivement de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ non réduit à $0_{\mathbb{K}[X]}$ appelé **idéal annulateur** de $u$ (respectivement $A$).*

**Démonstration**

C'est le noyau du morphisme d'anneau $P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(u) \in \mathcal{L}(E)$. □

**Définition : Polynôme minimal**

On appelle polynôme minimal de $u$ (respectivement de $A$) l'unique générateur unitaire de cet idéal. On le notera $\pi_u$ (respectivement $\pi_A$).

**Remarques**

**R 1 –** Pas de notation officiel, on le note parfois $\mu_u$ ou $\mu_A$.

**R 2 –** La définition est licite car $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal.

**R 3 –** $\{P \in \mathbb{K}[X],\ P(u) = 0\} = (\pi_u) = \pi_u\mathbb{K}[X]$ : $\pi_u$ est donc le polynôme annulateur unitaire non nul de degré minimal.

**R 4 –** $P(u) = 0$ si et seulement si $\pi_u$ divise $P$.

**R 5 –** Si $P(u) = 0$ et $\deg P < \deg \pi_u$, alors $P = 0$.

**Propriété**

*Si $A$ est une matrice représentant l'endomorphisme $u$, alors $\pi_u = \pi_A$.*

**Démonstration**

$u$ et $A$ ont même idéal annulateur. □

**Propriété**

*Si $d = \deg \pi_u$ (respectivement $d = \deg \pi_A$), alors $(\mathrm{id}_E, u, \dots, u^{d-1})$ est une base de $\mathbb{K}[u]$ (respectivement $(I_n, A, \dots, A^{d-1})$ est une base de $\mathbb{K}[A]$).*

**Démonstration**

Le caractère libre vient de la minimalité, le caractère générateur vient de la division euclidienne. □

**Propriété**

*Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique. En particulier, il est de degré au plus $n$.*

**Démonstration**

Conséquence de Cayley-Hamilton □

**Propriété**

*Les racines du polynôme minimal sont **exactement** les valeurs propres.*

### Démonstration

Comme $\pi_u$ est un polynôme annulateur, on sait déjà que $\operatorname{Sp} u \subset \mathcal{Z}(u)$.

Réciproquement, comme $\pi_u$ divise $\chi_u$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton, les racines de $\pi_u$ sont bien des valeurs propres.

On peut aussi le voir sans : si $\lambda$ racine de $\pi_u$, alors $\pi_u = (X-\lambda)Q$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$, donc $\mu(u) = 0_{\mathscr{L}(E)} = (u - \lambda \operatorname{id}_E) \circ Q(u)$. Si $\lambda$ n'était pas valeur propre, alors $u - \lambda \operatorname{id}_E$ serait un isomorphisme et $Q(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ ce qui contredit la minimalité. □

### Remarques

**R 1 –** Donc $\prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} u} (X-\lambda)$ divise $\pi_u$ qui divise $\chi_u$.

**R 2 –** $\chi_u$ et $\pi_u$ ont les mêmes racines mais pas nécessairement les mêmes multiplicités.
Exemple : avec $\chi_{I_n} = (X-1)^n$ et $\pi_{I_n} = X-1$.

**R 3 –** Si $\chi_u$ est scindé simple, alors $\pi_u = \chi_u$.
La réciproque est fausse : si $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\chi_A = X^2$ donc $\pi_A \in \{X, X^2\}$ et comme $A \neq 0_2$, $\pi_A = X^2 = \chi_A$.

**Propriété : Caractérisation 7**

*$u$ est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé simple si et seulement si $\pi_u = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} u} (X-\lambda)$.*

*(Idem avec les matrices)*

### Démonstration

On a déjà vu qu'être annulé par un polynôme scindé simple rendait diagonalisable.

Si, réciproquement, $u$ est diagonalisable, alors le lemme des décomposition des noyaux avait permis de montrer que $P = \prod_{i=1}^{m} (X-\lambda_i)$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont les valeurs propres de $u$, est un polynôme annulateur de $u$. Donc il divise $\pi_u$.

Or les $\lambda_i$ sont les racines de $\pi_u$ qui est unitaire, donc $\pi_u = \prod_{i=1}^{m} (X-\lambda_i)$ qui est scindé simple. □

**Propriété**

*Si $F$ est stable par $u$, $u_F$ l'endomorphisme induit, alors $\pi_{u_F}$ divise $\pi_u$.*

### Démonstration

Comme $\pi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$, $\pi_u(u_F) = 0_{\mathscr{L}(F)}$ et donc $\pi_{u_F} | \pi_u$. □

**Propriété**

*$u$ est trigonalisable si et seulement si $u$ est annulé par un polynôme scindé si et seulement si son polynôme minimal est scindé.*

### Démonstration

En effet, si $u$ est trigonalisable, $\chi_u$ est scindé et c'est un polynôme annulateur d'après Cayley-Hamilton.

Si, réciproquement, $P$ est un polynôme annulateur scindé, $A$ matrice de $u$ dans une base $\mathscr{B}$, $\pi_A$ divise $P$ donc a au moins une racine donc $\operatorname{Sp} A = \operatorname{Sp} u \neq \varnothing$.

Soit $\lambda \in \operatorname{Sp} A$, $x$ vecteur propre associé que l'on complète en une base de $E$, ce qui permet de voir que $A$ est semblable à $A' = \begin{pmatrix} \lambda & (*) \\ (0) & A_1 \end{pmatrix}$.

Alors $P(A')=\begin{pmatrix} P(\lambda) & (*) \\ (0) & P(A_1)\end{pmatrix}=0_n$ donc $P$ annule $A_1$ et on termine par récurrence sur $n$ comme dans la caractérisation avec le polynôme caractéristique scindé. $\square$

**Exercice : CCINP 91**

**On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.**

1. **Montrer que $A$ n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.**
2. **La matrice $A$ est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?**
3. **Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de $A$. Vérifier que le polynôme caractéristique de $A$ en est un polynôme annulateur.**
4. **Soit $n\in\mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^n$ par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de $A^n$.**

**Exercice : CCINP 88**

1. **Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).**
   **Soit $u\in\mathscr{L}(E)$. Soit $P\in\mathbb{K}[X]$.**
   **Prouver que si $P$ annule $u$, alors toute valeur propre de $u$ est racine de $P$.**
2. **Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant 2$. On pose $E=\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.**
   **Soit $A=\left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ la matrice de $E$ définie par $a_{i,j}=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad i=j \\ 1 & \text{si} \quad i\neq j\end{cases}$.**
   **Soit $u\in\mathscr{L}(E)$ défini par : $\forall M\in E, u(M)=M+\mathrm{tr}(M)A$.**
   (a) **Prouver que le polynôme $X^2-2X+1$ est annulateur de $u$.**
   (b) **$u$ est-il diagonalisable ?**
   **Justifier votre réponse en utilisant deux méthodes (une avec puis sans l'aide de la question 1.).**

---

1. Soit $u\in\mathscr{L}(E)$. Soit $P=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kX^k\in\mathbb{K}[X]$.
   On suppose que $P$ annule $u$.
   Soit $\lambda$ une valeur propre de $u$.
   Prouvons que $P(\lambda)=0$.
   $\lambda$ valeur propre de $u$ donc : $\exists x\in E\backslash\{0\}\ /\ u(x)=\lambda x$.
   On prouve alors par récurrence que : $\forall\, k\in\mathbb{N}$, $u^k(x)=\lambda^k x$.
   Ainsi : $P(u)(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_ku^k(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\lambda^kx=P(\lambda)\,x$.
   Or $P(u)=0$ donc $P(u)(x)=0$ donc $P(\lambda)x=0$.
   Or $x\neq 0$ donc $P(\lambda)=0$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant 2$. On pose $E=\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   Soit $A=\left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ la matrice de $E$ définie par $a_{i,j}=\begin{cases} 0 \text{ si } i=j \\ 1 \text{ si } i\neq j\end{cases}$.
   (a) Posons $P=X^2-2X+1$.
   Prouvons que $P$ est annulateur de $u$ c'est-à-dire que $P(u)=0$.
   Soit $M\in E$.
   $u^2(M)=u\circ u(M)=(M+\mathrm{tr}(M)A)+\mathrm{tr}\,(M+\mathrm{tr}(M)A)\,A$.
   C'est-à-dire, par linéarité de la trace, $u^2(M)=M+\mathrm{tr}(M)A+\mathrm{tr}(M)A+\mathrm{tr}(M)\mathrm{tr}(A)A$.
   Or $\mathrm{tr}(A)=0$ donc $u^2(M)=M+2\mathrm{tr}(M)A$.
   Ainsi $u^2(M)-2u(M)+\mathrm{Id}(M)=M+2\mathrm{tr}(M)A-2M-2\mathrm{tr}(M)A+M=0$.
   On a donc prouvé que $u^2-2u+\mathrm{Id}=0$.

   C'est-à-dire $P$ est annulateur de $u$.
   (b) Notons $\mathrm{I}_n$ la matrice unité de $E$.
   **Première méthode** :
   Notons $\mathrm{Spec}(u)$ le spectre de $u$.
   $P=(X-1)^2$ et $P$ est annulateur de $u$.
   Donc d'après 1., $\mathrm{Spec}(u)\subset\{1\}$.

De plus $A \neq 0$ et $u(A) = A$ donc $\mathrm{Spec}(u) = \{1\}$.
Ainsi, si $u$ était diagonalisable alors on aurait $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.
C'est-à-dire, on aurait $u = \mathrm{Id}$.
Or $u(\mathrm{I_n}) \neq \mathrm{I_n}$ (puisque $\mathrm{tr}(\mathrm{I_n}) \neq 0$) donc $u \neq \mathrm{Id}$.
On obtient donc une contradiction.
On en déduit que $u$ n'est pas diagonalisable.
**Deuxième méthode** :

Notons $P_m$ le polynôme minimal de $u$.
$P = (X-1)^2$ est un polynôme annulateur de $u$ donc $P_m | P$.
Si $u$ était diagonalisable alors $P_m$ serait scindé à racines simples.
On aurait donc $P_m = X - 1$.
Ce qui impliquerait que $u = \mathrm{Id}$ car $P_m$ est également un polynôme annulateur de $u$.
Or $u(\mathrm{I_n}) \neq \mathrm{I_n}$ (puisque $\mathrm{tr}(\mathrm{I_n}) \neq 0$) donc $u \neq \mathrm{Id}$.
On obtient donc une contradiction.
On en déduit que $u$ n'est pas diagonalisable.

# VI Trigonalisation d'un endomorphisme à polynôme minimal scindé

**Théorème**

*Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $P$ polynôme annulateur scindé de $u$.*
*Alors on peut trouver des sous-espaces $F_1, \dots, F_p$ de $E$, stables par $u$, supplémentaires dans $E$, tels que sur chaque $F_k$, l'endomorphisme $u_k$ induit par $u$ soit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent ($u_k = a_k \mathrm{id}_{F_k} + n_k$).*

### Démonstration

$P = \prod_{k=1}^{r} (X - a_k)^{p_k}$. On pose $P_k = (X - a_k)^{p_k}$.

Alors les $P_k$ sont deux à deux premiers entre eux, et si $F_k = \mathrm{Ker}\left(u - a_k \mathrm{id}_E\right)^{p_k}$, alors, $F_k$ stable par $u$ et d'après le lemme de décomposition des noyaux, $E = \bigoplus_{k=1}^{r} F_k$.

Pour chaque $k$, on pose $n_k = u_k - a_k \mathrm{id}_{F_k} \in \mathscr{L}(F_k)$ et alors $n_k^{p_k} = 0_{\mathscr{L}(F_k)}$, ce qui termine la démonstration. □

**Remarques**

**R 1 –** Les $F_k$ de dimension $0$ n'ont pas d'intérêt (cas où $a_k$ n'est pas valeur propre de $u$).

**R 2 –** Dans une base adaptée à la décomposition, si $p_k = \dim F_k$, on a donc que $u$ est représenté par $\begin{pmatrix} a_1 I_{p_1} + N_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_r I_{p_r} + N_r \end{pmatrix}$ où les $N_k$ sont nilpotentes ce qui permet, en choisissant une base dans laquelle les $N_k$ sont triangulaires supérieures de retrouver le fait que les $a_k$ pour lesquels $p_k \neq 0$ sont les valeurs propres de $u$ et que $u$ est trigonalisable.

On a dans ce cas que $\chi_u = \prod_{k=1}^{r} (X - a_k)^{p_k}$ donc pour tout $k$, $p_k = m_k$ est la multiplicité de $a_k$ en tant que valeur propre (éventuelle) de $u$.

**R 3 –** Comme $u$ est trigonalisable, $\chi_u$ est scindé, donc en appliquant ce résultat à $\chi_u = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$, on obtient que pour tout $k$, $\dim F_k = m_k$ où $F_k = \mathrm{Ker}\left(u - \lambda_k \mathrm{id}_E\right)^{m_k}$ appelé sous-espace caractéristique de $u$ associé à $\lambda_k$. Les sous-espaces caractéristiques sont supplémentaires dans $E$.

**Corollaire**

*Si $u$ est trigonalisable, on peut trouver $d$ diagonalisable et $n$ nilpotent tels que $u = d + n$ et $nd = dn$.*

**Remarques**

- **R 1** – On peut même montrer que $d$ et $n$ sont uniques et sont des polynômes en $u$. On parle de décomposition de Dunford.
- **R 2** – C'est très intéressant pour calculer les puissances de $u$.