chapitreXX

Espaces Vectoriels Normés

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Norme sur un espace vectoriel

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1 Norme et distance

Définition : Norme, espace vectoriel normé

On appelle **norme** sur E toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

Défini-positivité : Pour tout $x \in E$, $N(x) \geqslant 0$ et $N(x) = 0_{\mathbb{R}} \Longrightarrow x = 0_E$.

Homogénéité : Pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$.

Inégalité triangulaire (ou sous-additivité) : Pour tout $x, y \in E$, $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$.

On dit alors que le couple (E,N) est un **espace vectoriel normé**.

Propriété

Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $x, y \in E$.

(i) $\|0_E\| = 0_{\mathbb{R}}$

(ii) $\|-x\| = \|x\|$

(iii) $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x \pm y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Définition : Vecteur unitaire

Dans un espace vectoriel normé $(E,\|\cdot\|)$, un vecteur **unitaire** ou **normé** est un vecteur $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$.

Définition : Distance associée à une norme

Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.
On appelle **distance** associée à $\|\cdot\|$ l'application

$$\mathrm{d} : \left|\begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x,y) & \longmapsto & \|x-y\| \end{array}\right.$$

Propriété

Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, d distance associée, $x, y, z \in E$.

(i) $\mathrm{d}(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

(ii) ***Symétrie*** : $d(x,y) = d(y,x)$.

(iii) ***Double inégalité triangulaire*** :

$$\big|\mathrm{d}(x,z) - \mathrm{d}(z,y)\big| \leqslant \mathrm{d}(x,y) \leqslant \mathrm{d}(x,z) + \mathrm{d}(z,y).$$

Définition : distance à une partie

Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, A une partie non vide de E, $x \in E$.

On appelle **distance de x à A** le réel $\mathrm{d}(x,A) = \inf_{a\in A} \mathrm{d}(x,a) = \inf_{a\in A} \|x-a\|$ qui est bien défini.

Propriété

$\left|\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{d}(x,A) \end{array}\right.$ *est 1-lipschitzienne sur E dans le sens où*

$$\forall\, x, y \in E,\ \ \big|\mathrm{d}(x,A) - \mathrm{d}(y,A)\big| \leqslant \|x-y\|.$$

C'est en particulier le cas de $x \mapsto \mathrm{d}(x,a)$ où $a \in E$ avec $A = \{a\}$.

2 Normes usuelles

a Sur $\mathbb{K}^n$

Définition

On définit, pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{k\in[\![1,n]\!]} |x_k|.$$

Propriété

Il s'agit de normes sur $\mathbb{K}^n$.

b Sur $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$

Propriété

Si X est un ensemble non vide, l'ensemble $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$ des fonctions bornées définies sur X à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un K-espace vectoriel.

Définition

On définit, pour $f \in E = \mathscr{B}(X,\mathbb{K})$, $N_\infty(f) = \sup_{x\in X} |f(x)|$.

Propriété

Il s'agit d'une norme sur $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$.

c Sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$

Définition

On définit, pour $f \in E = \mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$,

$$N_1(f) = \int_a^b |f|\,\mathrm{d}x$$

$$N_2(f) = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x} = \left(\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

$$N_\infty(f) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Propriété

Il s'agit de normes sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$.

3 Boules et sphères

On fixe $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Définition

Soient $a\in E$ et $r\in\mathbb{R}^+$.

Boule ouverte de centre a et de rayon r : $B(a,r) = \{x\in E,\ \|x-a\| < r\}$.

Boule fermée de centre a et de rayon r : $\overline{B}(a,r) = \{x\in E,\ \|x-a\| \leqslant r\}$.

Sphère de centre a et de rayon r : $S(a,r) = \{x\in E,\ \|x-a\| = r\}$.

Définition : Partie convexe

Une partie A de E est dite **convexe** lorsque pour tout $x,y\in E$ et pour tout $t\in[0,1]$, $tx+(1-t)y\in A$.

Propriété

Les boules sont convexes.

4 Parties, suites et fonctions bornées

Définition : Partie bornée

$A\in\mathscr{P}(E)$ est **bornée** s'il existe $M\in\mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x\in A$, $\|x\|\leqslant M$.

Propriété

Toute boule (ouverte ou fermée) de E est bornée.

Définition : Fonction bornée

Soit X un ensemble non vide, $f\in E^X$.

On dit que f est **bornée** s'il existe $M\in\mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x\in X$, $\|f(x)\|\leqslant M$ (ie si $f(A)$ est une partie bornée de E.)

On note $\mathscr{B}(X,E)$ l'ensemble des fonctions de E^X bornées.

Propriété

On pose, pour $f\in\mathscr{B}(X,E)$, $N_\infty(f) = \sup_{x\in X}\|f(x)\|$, bien défini.

Alors (E,N_∞) est un espace vectoriel normé.

On obtient en particulier, pour $X=\mathbb{N}$:

Définition : Suite bornée

Soit $u\in E^{\mathbb{N}}$. On dit que u est **bornée** s'il existe $M\in\mathbb{R}^+$ tel que pour tout $n\in N$, $\|u_n\|\leqslant M$ (ie si $\{u_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ est une partie bornée de E.)

On note $\mathscr{B}(X,E)$ l'ensemble des fonctions de E^X bornées.

5 Produit fini d'espaces vectoriels normés

Propriété

Si $(E_1,N_1),\dots,(E_p,N_p)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

On pose, pour $x=(x_1,\dots,x_p)\in E_1\times\cdots\times E_p$, $N(x) = \max_{1\leqslant k\leqslant n} N_k(x_k)$.

*Alors N est une norme sur $E_1\times\cdots\times E_p$ appelée **norme produit**.*

II Suite d'éléments d'un espace vectoriel normé

On fixe $(E,\|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé non nul.

1 Convergence d'une suite

Définition : Suite convergente, divergente

Soit $u\in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell\in E$.

On dit que u **converge** vers ℓ lorsque pour tout $\varepsilon>0$, il y a un rang à partir duquel u_n est à distance au plus ε de ℓ.

Autrement dit $\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant N,\ \|u_n-\ell\|\leqslant\varepsilon$.

Dans ce cas, on dit que u est **convergente** et que ℓ est sa **limite**. On note $u_n\longrightarrow\ell$ ou $u_n\xrightarrow{\|\cdot\|}\ell$.

Lorsque u n'est pas convergente, elle est dite **divergente**.

Définition

Si $E=\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$, $(f_n)\in E^{\mathbb{N}}$, $f\in E$.

Si $f_n\xrightarrow{N_1} f$, on parle de **convergence en moyenne**.

Si $f_n\xrightarrow{N_2} f$, on parle de **convergence en moyenne quadratique**.

Si $f_n\xrightarrow{N_\infty} f$, on parle de **convergence uniforme** (convergence graphique).

Théorème : Unicité de la limite

Soit $u\in\mathbb{E}^{\mathbb{N}}$, $\ell,\ell'\in E$. Si $u_n\longrightarrow\ell$ et $u_n\longrightarrow\ell'$, alors $\ell=\ell'$.

Propriété

Toute suite convergente est bornée.

Propriété

Soit $u \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$. Si $u_n \longrightarrow \ell$, alors $\|u_n\| \longrightarrow \|\ell\|$.

Propriété

Si $u \in E^{\mathbb{N}}$, $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$ tel qu'à partir d'un certain rang $\|u_n - \ell\| \leqslant \alpha_n$ et $\alpha_n \longrightarrow 0$, alors $u_n \longrightarrow \ell$.

Définition : Valeur d'adhérence

On appelle **valeur d'adhérence** de $u \in E^{\mathbb{N}}$ toute limite (dans $(E, \|\cdot\|)$) de suite extraite de u.

Propriété

Une suite convergente a une unique valeur d'adhérence.

Corollaire

Si une suite a plusieurs valeurs d'adhérence, elle diverge.

2 Opérations algébriques

Propriété : Espace vectoriel des suites convergentes

Soit $u, v \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$, $\ell, \ell' \in E, \lambda \in \mathbb{K}$. Si $u_n \longrightarrow \ell$ et $v_n \longrightarrow \ell'$, alors $u + \lambda v$ est convergente et $u_n + \lambda v_n \longrightarrow \ell + \lambda \ell'$.

Propriété

Si $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $(\alpha_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \longrightarrow \ell \in E$ et $\alpha_n \longrightarrow \alpha \in \mathbb{K}$, alors $\alpha_n u_n \longrightarrow \alpha \ell$.

3 Suite à valeurs dans un produit

Propriété

Si $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, N la norme produit sur $E_1 \times \dots \times E_p$, $u = \left(u^{(1)}, \dots, u^{(p)}\right) \in (E_1 \times \dots \times E_p)^{\mathbb{N}}$, $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$.

Alors $u \xrightarrow{N} \ell$ si et seulement si pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $u^{(k)} \xrightarrow{N_k} \ell_k$.

III Comparaison de normes

Soit $(E, +, \times)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et N_1 et N_2 deux normes sur E.

1 Domination

Définition : Domination

On dit que N_1 est dominée par N_2 lorsqu'il existe $\alpha > 0$ tel que $N_1 \leqslant \alpha N_2$.

Propriété

Soit N_1 dominée par N_2 et $u \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$. Si $u_n \xrightarrow{N_2} \ell$, alors $u_n \xrightarrow{N_1} \ell$.

Méthode : Montrer que N_1 n'est pas dominée par N_2

On peut chercher une suite (u_n) telle que $(N_2(u_n))$ borné mais pas $(N_1(u_n))$ ou alors telle que $N_2(u_n) \longrightarrow 0$ et non $N_1(u_n)$.

2 Équivalence

a Définition

Définition : Normes équivalentes

N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si elles se dominent mutuellement, si et seulement s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $\alpha N_2 \leqslant N_1 \leqslant \beta N_2$.

Propriété

Si N_1 et N_2 sont équivalentes, $u_n \xrightarrow{N_1} \ell$ si et seulement si $u_n \xrightarrow{N_2} \ell$.

b Cas de $\mathbb{R}^n$

Propriété

Les trois normes usuelles sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$.

c Cas de $\mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$

Propriété

Sur $\mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$,

- *$N_1 \leqslant (b-a) N_\infty$ et N_∞ n'est pas dominée par N_1.*
- *$N_2 \leqslant \sqrt{b-a} N_\infty$ et N_∞ n'est pas dominée par N_2.*
- *$N_1 \leqslant \sqrt{b-a} N_2$ et N_2 n'est pas dominée par N_1.*

d Cas de la dimension finie

Théorème

Toutes les normes sont équivalentes en dimension finie.

Propriété

Dans un espace de dimension finie, une suite converge vers une limite si et seulement si chaque coordonnée dans une base tend vers la coordonnée correspondante de la limite.

IV Topologie des espaces vectoriels normés

On se donne $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé fixé, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, d la distance associée.

1 Voisinages, ouverts, fermés

a Voisinage

Définition : Voisinage

Soient $a \in E$ et V une partie de E.

On dit que V est un **voisinage** de a s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset V$, c'est-à-dire qu'il existe une boule ouverte centrée en a contenue dans V.

Propriété

(i) *Si V voisinage de a et $V \subset W$, alors W est un voisinage de a.*

(ii) *Une réunion quelconque de voisinages de a est un voisinage de a.*

(iii) *Une intersection **finie** de voisinages de a est un voisinage de a.*

Propriété

Si N_1 est une norme dominée par N_2, alors les voisinages pour N_1 sont des voisinages pour N_2.

Si les normes sont équivalentes, les voisinages pour l'une sont exactement les voisinages pour l'autre.

b Parties ouvertes

Définition : Ouvert

Une partie $\mathcal{O}$ de E est dite **ouverte** ou **un ouvert** de E lorsque $\mathcal{O}$ est voisinage de tout ses points, autrement dit $\forall a \in \mathcal{O}, \ \exists \varepsilon > 0, \ B(a, \varepsilon) \subset \mathcal{O}$.

Par convention, $\varnothing$ est ouvert.

Propriété

Toute boule ouverte est ouverte (!)

Propriété

(i) *$\varnothing$, E sont ouverts.*

(ii) *Une réunion quelconque d'ouverts est ouverte.*

(iii) *Une intersection **finie** d'ouverts est ouverte.*

Propriété

Si N_1 est une norme dominée par N_2, alors les ouverts pour N_1 sont des ouverts pour N_2.

Si les normes sont équivalentes, les ouverts pour l'une sont exactement les ouverts pour l'autre.

c Parties fermées

Définition : Fermé

Une partie F de E est dite fermée lorsque son complémentaire ${}^cF$ est ouvert.

Propriété

Toute boule fermée est fermée (!)

Propriété

(i) *$\varnothing$, E sont fermés.*

(ii) *Une intersection quelconque de fermés est fermée.*

(iii) *Une réunion **finie** de fermés est fermée.*

Propriété

Toute sphère de E est fermée.

Propriété : Caractérisation séquentielle

Une partie F de E est fermée si et seulement si toute suite convergente d'éléments de F a sa limite dans F.

2 Adhérence, densité, intérieur

a Points adhérents, adhérence

Définition : Point adhérent

Soit A une partie de E et $x \in E$. On dit que x est adhérent à A lorsque $\forall \varepsilon > 0, \ B(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$.

Propriété : Caractérisation séquentielle

x est adhérent à A si et seulement s'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x.

Définition : Adhérence

L'adhérence $\overline{A}$ de A est l'ensemble des points adhérents à A.

Propriété

Si $A \subset B$, alors $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Propriété : Caractérisation

$\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

Propriété

F est un fermé de E si et seulement si $\overline{F} = F$.

Propriété

Si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\overline{A}$ l'est aussi.

b Densité

Définition : Densité

D est **dense** dans E lorsque $\overline{D} = E$, c'est-à-dire lorsque toute boule ouverte rencontre D.

Propriété : Caractérisation séquentielle

D est dense dans E si et seulement si tout élément de E est limite d'une suite d'élément de D.

c Intérieur

Définition

Soit A une partie de E, $x \in E$.

x est un **point intérieur** à A lorsque A est un voisinage de x, c'est-à-dire qu'il existe une boule ouverte centrée en x incluse dans A.

L'ensemble des points intérieurs à A est appelé **intérieur** de A, noté $\mathring{A}$.

Propriété

Si $A \subset B$, alors $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.

Propriété : Caractérisation

$\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A.

Propriété

$\mathcal{O}$ est ouvert si et seulement si $\mathring{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$.

d Frontière

Définition : Frontière

On appelle **frontière** de A l'ensemble $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

3 Ouverts, fermés, voisinages relatifs

On se fixe une partie A non vide de E.

a Voisinage relatif

Définition : Voisinage relatif

Soit $a \in A$. On appelle **voisinage relatif de a dans A** toute partie V' de A s'écrivant $V' = A \cap V$ où V est un voisinage de a.

b Ouverts relatifs

Définition : Ouvert relatif

Une partie $\mathcal{O}'$ de A est un **ouvert relatif de A** (ou **pour la topologie induite sur A**) lorsqu'il existe un ouvert $\mathcal{O}$ tel que $\mathcal{O}' = \mathcal{O} \cap A$.

c Fermés relatifs

Définition : Fermé relatif

Une partie F' de A est un fermé **relatif de** A s'il existe une fermé F tel que $F' = F \cap A$.

Propriété : Caractérisation séquentielle

Soit F' une partie de A.

*F' fermé relatif de A si et seulement si F' est une partie de A telle que toute suite d'éléments de F' convergeant **dans** A a sa limite dans F'.*

d Densité

Définition : Densité dans une partie

Soit B partie de A. B est **dense dans** A si et seulement si $A \subset \overline{B}$ si et seulement si tout élément de A est limite d'une suite d'éléments de B.