chapitreXX

# Espaces Vectoriels Normés

Extrait du programme officiel :

*Les notions d'espace métrique et, a fortiori, d'espace topologique, sont hors programme.*

*Les notions de suite de Cauchy et d'espace de Banach sont hors programme.*

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| **a) Normes et espaces vectoriels normés** | |
| Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. Structure d'espace vectoriel normé. | Vecteurs unitaires. |
| Distance associée à une norme. | Inégalité triangulaire. |
| Boules fermées, boules ouvertes, sphères. Convexité des boules. | |
| Parties, suites, fonctions bornées. | |
| Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel. | |
| Normes $\\|\ \\|_1$, $\\|\ \\|_2$, $\\|\ \\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. | |
| Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$. | |
| Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sur l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs réelles ou complexes. | |
| Produit fini d'espaces vectoriels normés. | |
| **b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé** | |
| Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Caractère borné d'une suite convergente. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés. | |
| Suites extraites, valeurs d'adhérence. | Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge. |
| **c) Comparaison des normes** | |
| Normes équivalentes. | Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite.<br>Utilisation des suites pour établir que deux normes ne sont pas équivalentes.<br>La comparaison de normes définies sur des espaces fonctionnels fait partie des capacités attendues des étudiants. |
| **d) Topologie d'un espace normé** | |
| Ouvert d'un espace normé. Stabilité par réunion quelconque, par intersection d'une famille finie. | Une boule ouverte est un ouvert. |
| Voisinage d'un point. | |
| Fermé d'un espace normé. Stabilité par intersection quelconque, par réunion finie. | Une boule fermée, une sphère, sont fermées. |
| Point intérieur, point adhérent. | |
| Intérieur, adhérence, frontière d'une partie. | |
| Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés. Partie dense. | |
| Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente. | |
| Si $A$ est une partie d'un espace normé, ouvert et fermé relatifs de $A$. Voisinage relatif. | Caractérisation séquentielle des fermés de $A$. |
| **i) Espaces vectoriels normés de dimension finie** | |
| Équivalence des normes sur un espace de dimension finie. | Démonstration non exigible. |

# Table des matières

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

# I Norme sur un espace vectoriel

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

## 1 Norme et distance

**Définition : Norme, espace vectoriel normé**

On appelle **norme** sur $E$ toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

**Défini-positivité** : Pour tout $x \in E$, $N(x) \geqslant 0$ et $N(x) = 0_{\mathbb{R}} \implies x = 0_E$.

**Homogénéité** : Pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$.

**Inégalité triangulaire (ou sous-additivité)** : Pour tout $x, y \in E$, $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$.

On dit alors que le couple $(E, N)$ est un **espace vectoriel normé**.

**Remarques**

**R 1** – Souvent notée $\|\cdot\|$ également.

**R 2** – Pas de cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire.

**Exemple**

Valeur absolue sur $\mathbb{R}$ (y en a-t-il d'autres ?) et module sur $\mathbb{C}$.

**Propriété**

*Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $x, y \in E$.*

*(i)* $\|0_E\| = 0_{\mathbb{R}}$

*(ii)* $\|-x\| = \|x\|$

*(iii)* $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x \pm y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

**Démonstration**

(i) Il suffit de prendre $\lambda = 0$ dans l'homogénéité.

(ii) C'est encore l'homogénéité.

(iii) On a déjà $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ puis $\|x-y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ avec la propriété précédente, puis $\|x+y-y\| \leqslant \|x+y\| + \|y\|$ donne $\|x\| - \|y\| \leqslant \|x+y\|$ puis par symétrie des rôles $\|y\| - \|x\| \leqslant \|x+y\|$ ce qui donne bien $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x+y\|$. Enfin, on tire $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x-y\|$ de la propriété précédente.

□

**Définition : Vecteur unitaire**

Dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, un vecteur **unitaire** ou **normé** est un vecteur $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$.

**Remarque**

Si $x \neq 0_E$, $\frac{1}{\|x\|} x$ est le vecteur normé associé à $x$ (de même direction et de même sens.)

**Définition : Distance associée à une norme**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

On appelle **distance** associée à $\|\cdot\|$ l'application

$$\mathrm{d}: \left| \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x,y) & \longmapsto & \|x-y\| \end{array} \right.$$

**Propriété**

*Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $\mathrm{d}$ distance associée, $x,y,z \in E$.*

*(i)* $\mathrm{d}(x,y)=0 \Longleftrightarrow x=y$.

*(ii)* ***Symétrie*** *:* $d(x,y)=d(y,x)$.

*(iii)* ***Double inégalité triangulaire*** *:*

$$\left|\mathrm{d}(x,z)-\mathrm{d}(z,y)\right| \leqslant \mathrm{d}(x,y) \leqslant \mathrm{d}(x,z)+\mathrm{d}(z,y).$$

**Démonstration**

(i) Facile.
(ii) Facile.
(iii) $\mathrm{d}(x,y)=\|x-z+z-y\| \leqslant \mathrm{d}(x,z)+\mathrm{d}(z,y)$ $d(x,z) \leqslant \mathrm{d}(x,y)+\mathrm{d}(y,z)$ donc $\mathrm{d}(x,z)-\mathrm{d}(z,y) \leqslant \mathrm{d}(x,y)$ d'où on tire par symétrie $\left|\mathrm{d}(x,z)-\mathrm{d}(z,y)\right| \leqslant \mathrm{d}(x,y)$. □

**Remarque**

Il existe une notion plus générale (Hors Programme) de distance sur un ensemble $E$ : c'est une application de $E^2$ dans $\mathbb{R}^+$ symétrique, telle que $\mathrm{d}(x,y)=0 \Longleftrightarrow x=y$ et vérifiant l'inégalité triangulaire $\mathrm{d}(x,z) \leqslant \mathrm{d}(x,y)+\mathrm{d}(y,z)$. On dit alors que $(E,d)$ est un **espace métrique**.

C'est bien le cas de la distance associée à une norme.

**Définition : distance à une partie**

Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $A$ une partie non vide de $E$, $x \in E$.
On appelle **distance de $x$ à $A$** le réel $\mathrm{d}(x,A)=\inf_{a\in A}\mathrm{d}(x,a)=\inf_{a\in A}\|x-a\|$ qui est bien défini.

**Démonstration**

$\{\|x-a\|,\ a \in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ (car $A$ non vide) minorée par $0$. □

**Propriété**

$\left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{d}(x,A) \end{array} \right.$ *est 1-lipschitzienne sur $E$ dans le sens où*

$$\forall\, x,y \in E,\quad \left|\mathrm{d}(x,A)-\mathrm{d}(y,A)\right| \leqslant \|x-y\|.$$

*C'est en particulier le cas de $x \mapsto \mathrm{d}(x,a)$ où $a \in E$ avec $A=\{a\}$.*

**Démonstration**

Si $a \in A$, par inégalité triangulaire, $\mathrm{d}(x,A) \leqslant \mathrm{d}(x,a) \leqslant \mathrm{d}(x,y)+\mathrm{d}(y,a)$ donc pour tout $a \in A$, $\mathrm{d}(y,a) \geqslant \mathrm{d}(x,A)-\mathrm{d}(x,y)$ qui ne dépend pas de $a$ donc qui est un minorant de $\{\mathrm{d}(y,a),\ a \in A\}$, donc par définition de la borne inférieure, $\mathrm{d}(y,A) \geqslant \mathrm{d}(x,A)-\mathrm{d}(x,y)$, ce qui donne $\mathrm{d}(x,A)-\mathrm{d}(y,A) \leqslant \mathrm{d}(x,y)$, par symétrie on a aussi $\mathrm{d}(y,A)-\mathrm{d}(x,A) \leqslant \mathrm{d}(x,y)$ et donc $\left|\mathrm{d}(x,A)-\mathrm{d}(y,A)\right| \leqslant \mathrm{d}(x,y)$. □

# 2 Normes usuelles

## a Sur $\mathbb{K}^n$

**Définition**

On définit, pour $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$,

$$\|x\|_1=\sum_{k=1}^{n}|x_k|$$
$$\|x\|_2=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2}=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right)^{1/2}$$
$$\|x\|_\infty=\max_{k\in[\![1,n]\!]}|x_k|.$$

**Remarque**

On rappelle que $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$ est la norme découlant du produit scalaire canonique $(x|y)=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k$ : on parle de norme euclidienne. La distance associée est dite euclidienne également.

Rappelons l'inégalité de Cauchy-Schwarz : si $x,y\in\mathbb{R}^n$, $|(x|y)|\leqslant\|x\|_2\,\|y\|_2$ soit encore $\left|\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\right|\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n}x_k^2\sum_{k=1}^{n}y_k^2}$ avec égalité si et seulement si $(x,y)$ liée.

Attention : pas de produit scalaire ni d'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ dans notre programme.

**Propriété**

*Il s'agit de normes sur $\mathbb{K}^n$.*

**Démonstration**

**Cas de $\|\cdot\|_1$**

**défini-positivité** Si $x\in\mathbb{K}^n$, $\|x\|_1=\sum_{k=1}^{n}|x_k|\in\mathbb{R}^+$ et si $\|x\|_1=0$, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $|x_k|=0$ car on somme des termes positifs, donc $x=0_{\mathbb{K}^n}$.

**homogénéité** Pas de difficulté.

**inégalité triangulaire** Si $x,y\in\mathbb{K}^n$, $\|x+y\|_1=\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|\leqslant\sum_{k=1}^{n}(|x_k|+|y_k|)=\|x\|_1+\|y\|_1$.

**Cas de $\|\cdot\|_\infty$**

**défini-positivité** Si $x\in\mathbb{K}^n$, $\|x\|_\infty=\max_{k\in[\![1,n]\!]}|x_k|\in\mathbb{R}^+$ et si $\|x\|_\infty=0$, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $|x_k|=0$ car on prend le maximum de termes positifs, donc $x=0_{\mathbb{K}^n}$.

**homogénéité** Si $x\in\mathbb{K}^n$ et $\lambda\in\mathbb{K}$, $\|\lambda x\|_\infty=\max_{k\in[\![1,n]\!]}(|\lambda|\,|x_k|)=|\lambda|\max_{k\in[\![1,n]\!]}|x_k|=|\lambda|\,\|x\|_\infty$ car $|\lambda|\geqslant 0$.

**inégalité triangulaire** Si $x,y\in\mathbb{K}^n$, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $|x_k+y_k|\leqslant|x_k|+|y_k|\leqslant\|x\|_\infty+\|y\|_\infty$ donc en particulier $\|x+y\|_\infty\leqslant\|x\|_\infty+\|y\|_\infty$.

**Cas de $\|\cdot\|_2$**

**défini-positivité** Si $x\in\mathbb{K}^n$, $\|x\|_2=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2}\in\mathbb{R}^+$ et si $\|x\|_2=0$, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $|x_k|^2=0$ car on somme des termes positifs, donc $x=0_{\mathbb{K}^n}$.

**homogénéité** Pas de difficulté.

**inégalité triangulaire** (Appelée inégalité de Minkowski dans ce cas.) Soient $x,y\in\mathbb{K}^n$.

**Cas $\mathbb{K}=\mathbb{R}$**

$$\|x+y\|_2^2=\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)^2=\sum_{k=1}^{n}x_k^2+\sum_{k=1}^{n}y_k^2+2\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\leqslant\|x\|_2^2+\|y\|_2^2+2\|x\|_2\,\|y\|_2=(\|x\|_2+\|y\|_2)^2$$

par inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.
Comme tout est positif, on a bien $\|x+y\|_2\leqslant\|x\|_2+\|y\|_2$.

**Cas $\mathbb{K}=\mathbb{C}$** Pas d'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas complexe au programme. On se ramène au cas réel.

$$\|x+y\|_2^2=\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^2=\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)\left(\overline{x_k}+\overline{y_k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(|x_k|^2+|y_k|^2+\overline{x_k}y_k+x_k\overline{y_k}\right)=\|x\|_2^2+\|y\|_2^2+2\sum_{k=1}^{n}\mathfrak{Re}\left(\overline{x_k}y_k\right)$$

Or, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathfrak{Re}\left(\overline{x_k}y_k\right) \leqslant |\overline{x_k}y_k| = |x_k|\,|y_k|$ donc

$$\sum_{k=1}^{n} \mathfrak{Re}\left(\overline{x_k}y_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|\,|y_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \sum_{k=1}^{n} |y_k|^2} = \|x\|_2\,\|y\|_2$$

en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs réels $(|x_1|,\dots,|x_n|)$ et $(|y_1|,\dots,|y_n|)$.
Finalement, $\|x+y\|_2^2 \leqslant (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2$ donc $\|x+y\|_2 \leqslant \|x\|_2 + \|y\|_2$. □

**Remarques**

**R 1 –** On peut montrer que plus généralement, si $p \geqslant 1$, $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$ et même que $\|x\|_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \|x\|_\infty$ (cf TD) d'où la notation.

**R 2 –** Plus généralement, sur un $K$-espace vectoriel de dimension $n$, de base $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$, on décompose un vecteur $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ et on pose $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2}$ et $\|x\|_\infty = \max_{k\in[\![1,n]\!]} |x_k|$ qui définissent des normes sur $E$.

**Exemples**

**E 1 –** Sur $\mathbb{K}_n[X]$, on peut définir des normes, pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $\|P\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$, $\|P\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2}$ et $\|P\|_\infty = \max_{k\in[\![1,n]\!]} |a_k|$.

**E 2 –** Sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on peut définir des normes $\|A\|_1 = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \left|a_{i,j}\right|$, $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \left|a_{i,j}\right|^2}$, $\|A\|_\infty = \max_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \left|a_{i,j}\right|$.

### b Sur $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$

**Propriété**

*Si $X$ est un ensemble non vide, l'ensemble $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$ des fonctions bornées définies sur $X$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $K$-espace vectoriel.*

**Remarque**

C'est même une $\mathbb{K}$-algèbre.

**Démonstration**

C'est une sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^X$ car une partie de cet espace, non vide (contient toute fonction constante) et si $f,g \in \mathscr{B}(X,\mathbb{K})$, $M_f, M_g \in \mathbb{R}^+$ tel que $|f| \leqslant M_f$ et $|g| \leqslant M_g$, $\lambda \in \mathbb{K}$, alors pour tout $x \in X$, $\left|f(x)+\lambda g(x)\right| \leqslant M_f + |\lambda|\,M_g$ donc $f+\lambda g \in \mathscr{B}(X,\mathbb{K})$. □

**Définition**

On définit, pour $f \in E = \mathscr{B}(X,\mathbb{K})$, $N_\infty(f) = \sup_{x\in X} \left|f(x)\right|$.

**Remarque**

Bien défini que $\operatorname{Im} f = \{\left|f(x)\right|,\ x \in X\}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$.

**Propriété**

*Il s'agit d'une norme sur $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$.*

**Remarque**

L'homogénéité est en particulier à savoir remontrer !

**Démonstration**

**défini-positivité** Soit $f \in \mathcal{B}(X,\mathbb{K})$. $N_\infty(f) \in \mathbb{R}^+$ et si $N_\infty(f) = 0$, pour tout $x \in X$, $0 \leqslant |f(x)| \leqslant N_\infty(f) = 0$ donc $f = 0_{\mathbb{K}^X}$.

**homogénéité** Soient $f \in \mathcal{B}(X,\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $\lambda = 0$, la formule est immédiate. Sinon, pour tout $x \in X$, $|\lambda f(x)| = |\lambda| |f(x)| \leqslant |\lambda| N_\infty(f)$ qui ne dépend pas de $x$ et qui est donc un majorant de $|\lambda f|$ donc $N_\infty(\lambda f) \leqslant |\lambda| N_\infty(f)$.

Puis $N_\infty(f) = N_\infty\left(\frac{1}{\lambda}\lambda f\right) \leqslant \frac{1}{|\lambda|} N_\infty(\lambda f)$ donc $N_\infty(\lambda f) \geqslant |\lambda| N_\infty(f)$.

Donc finalement $N_\infty(\lambda f) = |\lambda| N_\infty(f)$.

**inégalité triangulaire** Si $f, g \in \mathcal{B}(X,\mathbb{K})$ et $x \in X$, $|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant N_\infty(f) + N_\infty(g)$ qui ne dépend pas de $x$, donc $N_\infty(f+g) \leqslant N_\infty(f) + N_\infty(g)$. □

### C Sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$

**Définition**

On définit, pour $f \in E = \mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$,

$$N_1(f) = \int_a^b |f|\,\mathrm{d}x$$
$$N_2(f) = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x} = \left(\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$
$$N_\infty(f) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

**Remarques**

**R 1 –** Pour $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$, on a même $N_\infty(f) = \max\limits_{[a,b]} |f|$.

**R 2 –** On rappelle que $N_2$ sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ est la norme découlant du produit scalaire canonique $(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ : on parle de norme euclidienne. La distance associée est dite euclidienne également.
Rappelons l'inégalité de Cauchy-Schwarz : si $f,g \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$, $|(f|g)| \leqslant N_2(f)N_2(g)$ soit encore $\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b (f(t))^2\,\mathrm{d}t \int_a^b (g(t))^2\,\mathrm{d}t}$ avec égalité si et seulement si $(f,g)$ liée.
Attention : pas de produit scalaire ni d'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ dans notre programme.

**Propriété**

*Il s'agit de normes sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$.*

**Démonstration**

Soit $E = \mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$.

**Cas de $N_1$**

**défini-positivité** Si $f \in E$, $N_1(f) = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}^+$ par positivité de l'intégrale et si $N_1(f) = 0$, comme $|f|$ est continue et positive, par positivité améliorée, $|f|$ donc $f$ est la fonction nulle sur $[a,b]$.

**homogénéité** Pas de difficulté, par linéarité de l'intégrale.

**inégalité triangulaire** Si $f,g \in E$, $N_1(f+g) = \int_a^b |f(t)+g(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_a^b |g(t)|\,\mathrm{d}t = N_1(f)+N_1(g)$ par inégalité triangulaire dans $\mathbb{K}$ et linéarité de l'intégrale.

**Cas de $\|\cdot\|_\infty$** Se déduit directement de ce qui a été vu sur $\mathscr{B}([a,b],\mathbb{K})$ car $E \subset \mathscr{B}([a,b],\mathbb{K})$. Notons qu'ici la preuve est un peu plus simple car le $\sup$ est atteint : c'est un $\max$.

**Cas de $\|\cdot\|_2$**

**défini-positivité** Si $f \in E$, $N_2(f) = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t} \in \mathbb{R}^+$ par positivité de l'intégrale et si $N_2(f) = 0$, comme $|f|^2$ est continue et positive, par positivité améliorée, $|f|^2$ donc $f$ est la fonction nulle sur $[a,b]$.

**homogénéité** Pas de difficulté.

**inégalité triangulaire** (Appelée inégalité de Minkowski dans ce cas.) Soient $f,g \in E$.

**Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$**

$$\|f+g\|_2^2 = \int_a^b (f(t)+g(t))^2\,\mathrm{d}t = \int_a^b (f(t))^2\,\mathrm{d}t + \int_a^b (g(t))^2\,\mathrm{d}t + 2\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2\|f\|_2\|g\|_2 = (\|f\|_2+\|g\|_2)^2$$

par inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au produit scalaire canonique de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$.
Comme tout est positif, on a bien $N_2(f+g) \leqslant N_2(f)+N_2(g)$.

**Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$** Pas d'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas complexe au programme. On se ramène au cas réel.

$$\begin{aligned}N_2(f+g)^2 &= \int_a^b |f+g|^2 = \int_a^b (f+g)\left(\overline{f}+\overline{g}\right) = \int_a^b \left[|f|^2+|g|^2+\overline{f}g+f\overline{g}\right]\\ &= N_2(f)^2+N_2(g)^2+2\int_a^b \mathfrak{Re}\left(\overline{f}g\right)\\ &\leqslant N_2(f)^2+N_2(g)^2+2\int_a^b \left|\overline{f}g\right|\\ &\leqslant N_2(f)^2+N_2(g)^2+2\int_a^b |f||g|\\ &\leqslant N_2(f)^2+N_2(g)^2+2N_2(f)N_2(g) \qquad \text{par inégalité de Cauchy-Schwarz (réelle), avec } |f|,|g| \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})\\ &\leqslant (N_2(f)+N_2(g))^2\end{aligned}$$

Finalement, $N_2(f+g) \leqslant N_2(f)+N_2(g)$. □

## 3 Boules et sphères

On fixe $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

**Définition**

Soient $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$.

**Boule ouverte de centre $a$ et de rayon $r$** : $B(a,r) = \{x \in E,\ \|x-a\| < r\}$.

**Boule fermée de centre $a$ et de rayon $r$** : $\overline{B}(a,r) = \{x \in E,\ \|x-a\| \leqslant r\}$.

**Sphère de centre $a$ et de rayon $r$** : $S(a,r) = \{x \in E,\ \|x-a\| = r\}$.

**Exemples**

- **E 1 –** Cas où $r=0$ : $B(a,0)=\varnothing$ et $\overline{B}(a,0)=S(a,0)=\{a\}$.
- **E 2 –** Cas de $(\mathbb{R},|\cdot|)$ : $B(a,r)=]a-r,a+r[$, $\overline{B}(a,r)=[a-r,a+r]$, $S(a,r)=\{a-r,a+r\}$.
- **E 3 –** Boule unité fermée dans $\mathbb{R}^2$ pour les trois normes usuelles.

**Définition : Partie convexe**

Une partie $A$ de $E$ est dite **convexe** lorsque pour tout $x,y \in E$ et pour tout $t \in [0,1]$, $tx+(1-t)y \in A$.

**Remarque**

$\{tx+(1-t)y,\ t \in [0,1]\}$ représente le segment formé par les extrémités des vecteurs $x$ et $y$.

**Propriété**

*Les boules sont convexes.*

**Démonstration**

Si $x,y \in B(a,r)$, $t \in ]0,1[$, $z=(1-t)x+ty$, $\|z-a\| = \left\|(1-t)(x-a)+t(y-a)\right\| \leqslant (1-t)\|x-a\|+t\left\|y-a\right\| < r$.
Le cas de $\overline{B}(a,r)$ est similaire. □

## 4 Parties, suites et fonctions bornées

**Définition : Partie bornée**

$A \in \mathscr{P}(E)$ est **bornée** s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in A$, $\|x\| \leqslant M$.

**Propriété**

*Toute boule (ouverte ou fermée) de $E$ est bornée.*

**Démonstration**

Si $z \in B(a,r) \cup \overline{B}(a,r)$, $\|z\| = \|z-a+a\| \leqslant r + \|a\|$. □

**Remarque**

Une partie est bornée si et seulement si elle est incluse dans une boule (par exemple fermée).

**Définition : Fonction bornée**

Soit $X$ un ensemble non vide, $f \in E^X$.

On dit que $f$ est **bornée** s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \in X$, $\|f(x)\| \leqslant M$ (ie si $f(A)$ est une partie bornée de $E$.)

On note $\mathscr{B}(X,E)$ l'ensemble des fonctions de $E^X$ bornées.

**Propriété**

*On pose, pour $f \in \mathscr{B}(X,E)$, $N_\infty(f) = \sup_{x\in X} \|f(x)\|$, bien défini.*

*Alors $(E, N_\infty)$ est un espace vectoriel normé.*

**Démonstration**

Démonstration similaire à $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$ en remplaçant $|\cdot|$ par $\|\cdot\|$ (ce qui est bien licite). □

On obtient en particulier, pour $X = \mathbb{N}$ :

**Définition : Suite bornée**

Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que $u$ est **bornée** s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $n \in N$, $\|u_n\| \leqslant M$ (ie si $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est une partie bornée de $E$.)

On note $\mathscr{B}(X,E)$ l'ensemble des fonctions de $E^X$ bornées.

**Remarque**

On peut aussi définir une norme infinie sur l'ensemble des suites bornées.

## 5 Produit fini d'espaces vectoriels normés

**Propriété**

*Si $(E_1, N_1), \ldots, (E_p, N_p)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.*

*On pose, pour $x = (x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$, $N(x) = \max_{1\leqslant k\leqslant n} N_k(x_k)$.*

*Alors $N$ est une norme sur $E_1 \times \cdots \times E_p$ appelée **norme produit**.*

**Remarque**

En prenant $|\cdot|$ sur $\mathbb{K}$, la norme produit sur $\mathbb{K}^n$ est $\|\cdot\|_\infty$.

# II Suite d'éléments d'un espace vectoriel normé

On fixe $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé non nul.

## 1 Convergence d'une suite

**Définition : Suite convergente, divergente**

Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$.

On dit que $u$ **converge** vers $\ell$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il y a un rang à partir duquel $u_n$ est à distance au plus $\varepsilon$ de $\ell$.

Autrement dit $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon.$
Dans ce cas, on dit que $u$ est **convergente** et que $\ell$ est sa **limite**. On note $u_n \longrightarrow \ell$ ou $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \ell$.
Lorsque $u$ n'est pas convergente, elle est dite **divergente**.

**Remarques**

**R 1 –** $u_n \longrightarrow \ell$ si et seulement si la suite réelle $(\|u_n - \ell\|)_n$ converge vers 0.

**R 2 –** $u_n \longrightarrow \ell$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \in B(\ell, \varepsilon)$.

**R 3 –** La convergence dépend a priori de la norme.

**Définition**

Si $E = \mathscr{C}([a,b], \mathbb{K})$, $(f_n) \in E^{\mathbb{N}}$, $f \in E$.
Si $f_n \xrightarrow{N_1} f$, on parle de **convergence en moyenne**.
Si $f_n \xrightarrow{N_2} f$, on parle de **convergence en moyenne quadratique**.
Si $f_n \xrightarrow{N_\infty} f$, on parle de **convergence uniforme** (convergence graphique).

**Théorème : Unicité de la limite**

*Soit $u \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$, $\ell, \ell' \in E$. Si $u_n \longrightarrow \ell$ et $u_n \longrightarrow \ell'$, alors $\ell = \ell'$.*

**Propriété**

*Toute suite convergente est bornée.*

**Propriété**

*Soit $u \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$. Si $u_n \longrightarrow \ell$, alors $\|u_n\| \longrightarrow \|\ell\|$.*

**Propriété**

*Si $u \in E^{\mathbb{N}}$, $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\ell \in E$ tel qu'à partir d'un certain rang $\|u_n - \ell\| \leqslant \alpha_n$ et $\alpha_n \longrightarrow 0$, alors $u_n \longrightarrow \ell$.*

**Définition : Valeur d'adhérence**

On appelle **valeur d'adhérence** de $u \in E^{\mathbb{N}}$ toute limite (dans $(E, \|\cdot\|)$) de suite extraite de $u$.

**Propriété**

*Une suite convergente a une unique valeur d'adhérence.*

**Remarque**

Réciproque fausse.

**Corollaire**

*Si une suite a plusieurs valeurs d'adhérence, elle diverge.*

## 2 Opérations algébriques

**Propriété : Espace vectoriel des suites convergentes**

Soit $u, v \in \mathbb{E}^{\mathbb{N}}$, $\ell, \ell' \in E, \lambda \in \mathbb{K}$. Si $u_n \longrightarrow \ell$ et $v_n \longrightarrow \ell'$, alors $u + \lambda v$ est convergente et $u_n + \lambda v_n \longrightarrow \ell + \lambda \ell'$.

**Propriété**

Si $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $(\alpha_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \longrightarrow \ell \in E$ et $\alpha_n \longrightarrow \alpha \in \mathbb{K}$, alors $\alpha_n u_n \longrightarrow \alpha \ell$.

## 3 Suite à valeurs dans un produit

**Propriété**

Si $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, $N$ la norme produit sur $E_1 \times \dots \times E_p$, $u = \left(u^{(1)}, \dots, u^{(p)}\right) \in \left(E_1 \times \dots \times E_p\right)^{\mathbb{N}}$, $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$.

Alors $u \xrightarrow{N} \ell$ si et seulement si pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $u^{(k)} \xrightarrow{N_k} \ell_k$.

# III Comparaison de normes

Soit $(E, +, \times)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $N_1$ et $N_2$ deux normes sur $E$. On note $B_1(a, r)$ (respectivement $B_2(a, r)$) une boule ouverte pour $N_1$ (respectivement $N_2$).

## 1 Domination

**Définition : Domination**

On dit que $N_1$ est dominée par $N_2$ lorsqu'il existe $\alpha > 0$ tel que $N_1 \leqslant \alpha N_2$.

**Remarques**

**R 1 –** Traduction avec les boules : $B_2(a, r/\alpha) \subset B_1(a, r)$.

**R 2 –** Si une partie ou une fonction est bornée pour $N_2$, elle l'est automatiquement pour $N_1$ aussi.

**Propriété**

Soit $N_1$ dominée par $N_2$ et $u \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$. Si $u_n \xrightarrow{N_2} \ell$, alors $u_n \xrightarrow{N_1} \ell$.

**Remarque**

Si $N_1$ n'est pas dominée par $N_2$, on fabrique une suite qui tend vers 0 pour $N_2$ et diverge pour $N_1$ : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n \in E$ tel que $N_1(x_n) > n N_2(x_n)$. Il suffit alors de poser $z_n = \dfrac{1}{\sqrt{n} N_2(x_n)} x_n$...

**Méthode : Montrer que $N_1$ n'est pas dominée par $N_2$**

On peut chercher une suite $(u_n)$ telle que $(N_2(u_n))$ borné mais pas $(N_1(u_n))$ ou alors telle que $N_2(u_n) \longrightarrow 0$ et non $N_1(u_n)$.

## 2 Équivalence

### a Définition

**Définition : Normes équivalentes**

$N_1$ et $N_2$ sont équivalentes si et seulement si elles se dominent mutuellement, si et seulement s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $\alpha N_2 \leqslant N_1 \leqslant \beta N_2$.

**Remarque**
C'est une relation d'équivalence.

**Propriété**

*Si $N_1$ et $N_2$ sont équivalentes, $u_n \xrightarrow{N_1} \ell$ si et seulement si $u_n \xrightarrow{N_2} \ell$.*

### b Cas de $\mathbb{R}^n$

**Propriété**

*Les trois normes usuelles sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$.*

**Démonstration**

Visualiser avec des boules.
$\|\|_1 \leqslant n\|\|_\infty$ cas d'égalité : vecteur constant.
$\|\|_\infty \leqslant \|\|_1$ cas d'égalité : tous nuls sauf 1.
$\|\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|\|_2$ CS - cas d'égalité : celui de CS = tous égaux.
$\|\|_2 \leqslant \|\|_1$ cas d'égalité : tous nuls sauf 1.
$\|\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|\|_\infty$ cas d'égalité : tous égaux.
$\|\|_\infty \leqslant \|\|_2$ cas d'égalité : tous nuls sauf 1. □

### c Cas de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$

**Propriété**

*Sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$,*
- $N_1 \leqslant (b-a)N_\infty$ *et* $N_\infty$ *n'est pas dominée par* $N_1$.
- $N_2 \leqslant \sqrt{b-a}N_\infty$ *et* $N_\infty$ *n'est pas dominée par* $N_2$.
- $N_1 \leqslant \sqrt{b-a}N_2$ *et* $N_2$ *n'est pas dominée par* $N_1$.

**Démonstration**

$N_1 \leqslant (b-a)N_\infty$ : plus facile de converger en moyenne qu'uniformément. Égalité pour une fonction constante.
$N_2 \leqslant \sqrt{b-a}N_\infty$ : égalité pour $f$ constante.
$N_1 \leqslant \sqrt{b-a}N_2$ par Cauchy-Schwarz. Égalité pour $f$ constante.
$N_\infty$ n'est pas dominée par $N_1$ : sur $[0,1]$, $f_n$ telle que $N_\infty(f_n) = n$ et $N_1(f_n) = \frac{1}{2n}$ : triangle entre $(0,n)$ et $(1/n^2,0)$.
Avec la même suite de fonctions, $N_2(f_n) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ : $N_2$ n'est pas dominée par $N_1$.
Et donc $N_\infty$ n'est pas dominée par $N_2$, sinon elle le serait par $N_1$... □

**Exercice : CCINP 37**
**On note $E$ l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.**
**On pose : $\forall f \in E$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.**

1. **(a) Démontrer que $N_\infty$ et $N_1$ sont deux normes sur $E$.**
   **(b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout $f$ de $E$, $N_1(f) \leqslant kN_\infty(f)$.**
   **(c) Démontrer que tout ouvert pour la norme $N_1$ est un ouvert pour la norme $N_\infty$.**
2. **Démontrer que les normes $N_1$ et $N_\infty$ ne sont pas équivalentes.**

---

1. (a) Prouvons que $N_\infty$ est une norme sur $E$.
   $\forall f \in E$, $|f|$ est positive et continue sur le segment $[0,1]$ donc $f$ est bornée et donc $N_\infty(f)$ existe et est positive.
   i) Soit $f \in E$ telle que $N_\infty(f) = 0$.
   Alors, $\forall t \in [0,1]$, $|f(t)| = 0$, donc $f = 0$.
   ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $f \in E$.

   Si $\lambda = 0$ alors $N_\infty(\lambda f) = 0 = |\lambda| N_\infty(f)$.
   Si $\lambda \neq 0$ :

$\forall\, t \in [0,1],\ |\lambda f(t)| = |\lambda||f(t)| \leqslant |\lambda| N_\infty(f)$.
Donc $N_\infty(\lambda f) \leqslant |\lambda| N_\infty(f)$. (1)
$\forall\, t \in [0,1],\ |f(t)| = \dfrac{1}{|\lambda|}|\lambda f(t)| \leqslant \dfrac{1}{|\lambda|} N_\infty(\lambda f)$.
Donc $N_\infty(f) \leqslant \dfrac{1}{|\lambda|} N_\infty(\lambda f)$.
C'est-à-dire, $|\lambda| N_\infty(f) \leqslant N_\infty(\lambda f)$. (2)
Donc, d'après (1) et (2), $N_\infty(\lambda f) = |\lambda| N_\infty(f)$.
iii) Soit $(f,g) \in E^2$.
$\forall\, t \in [0,1], |(f+g)(t)| \leqslant |f(t)| + |g(t)| \leqslant N_\infty(f) + N_\infty(g)$.
Donc $N_\infty(f+g) \leqslant N_\infty(f) + N_\infty(g)$.
On en déduit que $N_\infty$ est une norme.

Prouvons que $N_1$ est une norme sur $E$.

$\forall\, f \in E$, $|f|$ est continue et positive sur $[0,1]$ donc $N_1(f)$ existe et est positive.
i) Soit $f \in E$ telle que $N_1(f) = 0$.
Or $|f|$ est continue et positive sur $[0,1]$, donc $|f|$ est nulle.
C'est-à-dire $f = 0$.
ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $f \in E$.
$N_1(\lambda f) = \displaystyle\int_0^1 |\lambda f(t)| \mathrm{d}t = |\lambda| \int_0^1 |f(t)| \mathrm{d}t = |\lambda| N_1(f)$.
iii) Soit $(f,g) \in E^2$.
$\forall\, t \in [0,1],\ |(f+g)(t)| \leqslant |f(t)| + |g(t)|$. Donc, par linéarité de l'intégrale, $N_1(f+g) \leqslant N_1(f) + N_1(g)$.
On en déduit que $N_1$ est une norme sur $E$.

(b) $k = 1$ convient car, $\forall\, f \in E$, $\displaystyle\int_0^1 \left|f(t)\right| \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 N_\infty(f) \mathrm{d}t = N_\infty(f)$.

(c) L'application identité de $E$, muni de la norme $N_\infty$, vers $E$, muni de la norme $N_1$, est continue car linéaire et vérifiant $\forall\, f \in E$, $N_1(f) \leqslant k N_\infty(f)$.
L'image réciproque d'un ouvert par une application continue étant un ouvert, on en déduit que : un ouvert pour la norme $N_1$ est un ouvert pour la norme $N_\infty$.
On peut aussi raisonner de façon plus élémentaire par inclusion de boules et retour à la définition d'un ouvert.

2. Pour $f_n(t) = t^n$, on a $N_1(f_n) = \dfrac{1}{n+1}$ et $N_\infty(f_n) = 1$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{N_\infty(f_n)}{N_1(f_n)} = +\infty$.
Donc ces deux normes ne sont donc pas équivalentes.

## d Cas de la dimension finie

**Théorème**

*Toutes les normes sont équivalentes en dimension finie.*

**Démonstration**

Non exigible, admis provisoirement. □

**Propriété**

*Dans un espace de dimension finie, une suite converge vers une limite si et seulement si chaque coordonnée dans une base tend vers la coordonnée correspondante de la limite.*

## e Exercice CCINP

**Exercice : CCINP 38**

**On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.**

**On pose $\forall\, P \in \mathbb{R}[X]$, $N_1(P) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} |a_i|$ et $N_\infty(P) = \max_{0\leqslant i\leqslant n} |a_i|$ où $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $n \geqslant \deg P$.**

1. **(a) Démontrer que $N_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.**
**Dans la suite de l'exercice, on admet que $N_1$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.**

   **(b) Démontrer que tout ouvert pour la norme $N_\infty$ est un ouvert pour la norme $N_1$.**

**(c) Démontrer que les normes $N_1$ et $N_\infty$ ne sont pas équivalentes.**

**2. On note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué par les polynômes de degré inférieur ou égal à $k$. On note $N_1'$ la restriction de $N_1$ à $\mathbb{R}_k[X]$ et $N_\infty'$ la restriction de $N_\infty$ à $\mathbb{R}_k[X]$. Les normes $N_1'$ et $N_\infty'$ sont-elles équivalentes ?**

---

1. (a) On pose $E=\mathbb{R}[X]$.
Montrons que $N_\infty$ est une norme sur E.
Par définition, $N_\infty(P)\geqslant 0$.

i) Soit $P=\sum_{i=0}^{n} a_iX^i \in E$ tel que $N_\infty(P)=0$.
C'est-à-dire $\max_{0\leqslant i\leqslant n}|a_i|=0$, donc, $\forall i\in[\![0,n]\!]$, $|a_i|=0$.
On en déduit que $P=0$.
ii) Soit $P=\sum_{i=0}^{n} a_iX^i\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.
$N_\infty(\lambda P)=\max_{0\leqslant i\leqslant n}|\lambda||a_i|=|\lambda|N_\infty(P)$.
iii) Soit $(P,Q)\in E^2$.
On considère un entier $n$ tel que $n\geqslant \max(\deg P,\deg Q)$.
Alors, $P=\sum_{i=0}^{n} a_iX^i$ et $Q=\sum_{i=0}^{n} b_iX^i$.
Ainsi, $P+Q=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)X^i$ et $N_\infty(P+Q)=\max_{0\leqslant i\leqslant n}|a_i+b_i|$.
Or, $\forall i\in[\![0,n]\!]$, $|a_i+b_i|\leqslant |a_i|+|b_i|\leqslant N_\infty(P)+N_\infty(Q)$.
Donc, $N_\infty(P+Q)\leqslant N_\infty(P)+N_\infty(Q)$.
On en déduit que $N_\infty$ est une norme.

(b) L'application identité de $\mathbb{R}[X]$, muni de la norme $N_1$, vers $\mathbb{R}[X]$, muni de la norme $N_\infty$, est continue car linéaire et vérifiant, $\forall P\in\mathbb{R}[X], N_\infty(P)\leqslant N_1(P)$.
L'image réciproque d'un ouvert par une application continue étant un ouvert, on en déduit qu'un ouvert pour la norme $N_\infty$ est un ouvert pour la norme $N_1$.
On peut aussi raisonner, de façon plus élémentaire, par inclusion de boules et retour à la définition d'un ouvert.

(c) Pour $P_n=1+X+X^2+\cdots+X^n$ on a $N_1(P_n)=n+1$ et $N_\infty(P_n)=1$.
Donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{N_1(P_n)}{N_\infty(P_n)}=+\infty$.
On en déduit que les normes $N_1$ et $N_\infty$ ne sont pas équivalentes.

2. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, en particulier $N_1'$ et $N_\infty'$.

# IV Topologie des espaces vectoriels normés

On se donne $(E,\|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé fixé, avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $d$ la distance associée.

## 1 Voisinages, ouverts, fermés

### a Voisinage

**Définition : Voisinage**

Soient $a\in E$ et $V$ une partie de $E$.
On dit que $V$ est un **voisinage** de $a$ s'il existe $\varepsilon>0$ tel que $B(a,\varepsilon)\subset V$, c'est-à-dire qu'il existe une boule ouverte centrée en $a$ contenue dans $V$.

**Remarque**

Cela revient à dire qu'on a une distance de sécurité autour de $a$ qui permet de s'en approcher dans toutes les directions en restant dans $V$.
En particulier, $a\in V$.

**Propriété**

*(i) Si $V$ voisinage de $a$ et $V \subset W$, alors $W$ est un voisinage de $a$.*
*(ii) Une réunion quelconque de voisinages de $a$ est un voisinage de $a$.*
*(iii) Une intersection **finie** de voisinages de $a$ est un voisinage de $a$.*

**Démonstration**

(i) Facile.

(ii) Si $(V_i)_{i\in I}$ est une famille de voisinages de $a$, pour n'importe quel $j \in I$, $V_j \subset \bigcup_{i\in I} V_i$ donc, d'après la propriété (i), $\bigcup_{i\in I} V_i$ est un voisinage de $a$.

(iii) Si $V_1,\dots,V_n$ sont des voisinages de $a$, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $\varepsilon_i > 0$ tel que $B(a,\varepsilon_i) \subset V_i$. Soit $\varepsilon = \min_{1\leqslant i\leqslant n} \varepsilon_i$. Alors $B(a,\varepsilon) \subset \bigcap_{i\in I} V_i$ qui est un voisinage de $a$. □

**Remarque**

⚠Ce n'est pas valable pour des intersections infinies.
Par exemple, dans $\mathbb{R}$, les $V_i = \left]-\frac{1}{i},\frac{1}{i}\right[$ sont des voisinages de $0$, mais $\bigcap_{i\in\mathbb{N}^*} V_i = \{0\}$ n'est pas un voisinage de $0$.

**Propriété**

*Si $N_1$ est une norme dominée par $N_2$, alors les voisinages pour $N_1$ sont des voisinages pour $N_2$.*
*Si les normes sont équivalentes, les voisinages pour l'une sont exactement les voisinages pour l'autre.*

**Démonstration**

On a $\alpha > 0$ tel que $N_1 \leqslant \alpha N_2$.
Si $V$ est un voisinage de $a$ pour $N_1$, on a un $\varepsilon > 0$ tel que $N_1(x-a) < \varepsilon \Longrightarrow x \in V$.
Alors $N_2(x-a) < \frac{\varepsilon}{\alpha} \Longrightarrow x \in V$.
Donc $V$ est un voisinage de $a$ pour $N_2$. □

## b Parties ouvertes

**Définition : Ouvert**

Une partie $\mathcal{O}$ de $E$ est dite **ouverte** ou **un ouvert** de $E$ lorsque $\mathcal{O}$ est voisinage de tous ses points, autrement dit $\forall a \in \mathcal{O},\ \exists \varepsilon > 0,\ B(a,\varepsilon) \subset \mathcal{O}$.

Par convention, $\varnothing$ est ouvert.

**Remarque**

Intuitivement, cela signifie qu'il n'y a pas de point « au bord ».

**Exemples**

**E1 –** Les intervalles $]0,1[$, $]0,1]$, $[0,1]$ sont-ils des ouverts de $(\mathbb{R},|\cdot|)$ ?

**E2 –** Le quart de plan $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0 \text{ et } y > 0\}$ est-il un ouvert de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ ?

**E3 –** Si $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$, alors $]a,b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

**Propriété**

*Toute boule ouverte est ouverte (!)*

**Démonstration**

Si $x \in E$, $r > 0$, $\mathcal{O} = B(x,r)$.
Soit $a \in \mathcal{O}$. Alors $B(a, r - d(x,a)) \subset \mathcal{O}$. En effet, si $d(a,b) < r - d(a,x)$, alors $d(x,b) < d(x,a) + d(a,b) < r$. □

**Propriété**

*(i) $\varnothing$, $E$ sont ouverts.*
*(ii) Une réunion quelconque d'ouverts est ouverte.*
*(iii) Une intersection **finie** d'ouverts est ouverte.*

**Remarque**

⚠Ce n'est pas valable pour des intersections infinies, avec le même contre-exemple que pour les voisinages.
Dans $\mathbb{R}$, les $V_i = \left]-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right[$ sont ouverts, mais $\bigcap_{i \in \mathbb{N}^*} V_i = \{0\}$ ne l'est pas.

**Démonstration**

(i) Facile.
(ii) Si les $\mathcal{O}_i$ pour $i \in I$ sont ouverts, et si $a \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$, alors il existe $j \in i$ tel que $a \in \mathcal{O}_j$ qui est ouvert, $\mathcal{O}_j$ est un voisinage de $a$ et donc $\mathcal{O}_j \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$ voisinage de $a$.
(iii) Si $a \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i$, alors pour tout $i$, $a \in \mathcal{O}_i$ donc les $\mathcal{O}_i$ sont tous voisinages de $a$, donc leur intersection (finie) l'est encore.

□

**Propriété**

*Si $N_1$ est une norme dominée par $N_2$, alors les ouverts pour $N_1$ sont des ouverts pour $N_2$.*
*Si les normes sont équivalentes, les ouverts pour l'une sont exactement les ouverts pour l'autre.*

**Démonstration**

Les voisinages pour $N_1$ sont des voisinages pour $N_2$. □

**Remarques**

**R1** – On appelle topologie de $(E, \|\cdot\|)$ l'ensemble de ses ouverts.
Si $N_1$ est dominée par $N_2$, la topologie pour $N_2$ possède plus d'ouverts que celle pour $N_1$. On dit que la topologie pour $N_2$ est plus fine que celle pour $N_1$.

**R2** – En particulier, en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Les notions de voisinages et donc d'ouverts ne dépendant pas du choix de la norme. Ce sera aussi le cas de toutes les notions définies ci-après : fermé, adhérence, intérieur, densité.

**Exercice : CCINP 37 et 38**
Question 1.b

## C Parties fermées

**Définition : Fermé**

Une partie $F$ de $E$ est dite fermée lorsque son complémentaire ${}^cF$ est ouvert.

**Remarques**

**R 1 –** Intuitivement : bord compris.

**R 2 –** ⚠ Fermé n'est pas le contraire d'ouvert. On peut être les deux à la fois. Le plus souvent, on n'est ni l'un ni l'autre...

**Propriété**

*Toute boule fermée est fermée (!)*

### Démonstration

Soit $F = \overline{B}(a, r)$. ${}^cF = \{x \in E,\ d(x, a) > r\}$.
Soit $b \in {}^cF$. On montre que $\overline{B}(b, d(b, a) - r) \subset {}^cF$.
En effet, si $x \in \overline{B}(b, d(b, a) - r)$, $d(a, x) \geqslant d(a, b) - d(x, b) \geqslant d(a, b) - (d(a, b) - r) = r$ donc $x \in {}^cF$. $\square$

**Remarque**

Les singletons sont des fermés.

**Propriété**

*(i) $\varnothing$, $E$ sont fermés.*
*(ii) Une intersection quelconque de fermés est fermée.*
*(iii) Une réunion **finie** de fermés est fermée.*

**Remarques**

**R 1 –** C'était l'inverse pour les ouverts.

**R 2 –** ⚠ Ce n'est pas valable pour des réunions infinies.
Dans $\mathbb{R}$, les $F_i = \left[-1 + \frac{1}{i}, 1 - \frac{1}{i}\right]$ sont fermés, mais $\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} F_i = ]-1, 1[$ ne l'est pas.

**R 3 –** Une partie finie est fermée.

### Démonstration

Il suffit de passer au complémentaire et d'utiliser les propriétés des ouverts. $\square$

**Exemples**

**E 1 –** Les intervalles $]0, 1[$, $]0, 1]$, $[0, 1]$ sont-ils des fermés de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ?

**E 2 –** Si $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, alors $]-\infty, b]$, $[a, +\infty[$, $[a, b]$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.

**Propriété**

*Toute sphère de $E$ est fermée.*

### Démonstration

$S(a, r) = \overline{B}(a, r) \cap {}^cB(a, r)$ est une intersection de fermés. $\square$

**Propriété : Caractérisation séquentielle**

*Une partie $F$ de $E$ est fermée si et seulement si toute suite convergente d'éléments de $F$ a sa limite dans $F$.*

**Démonstration**

($\Longrightarrow$) Si $F$ est fermée, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $F$, $\ell\in E$ sa limite, on suppose, par l'absurde que $\ell\in {}^cF$, qui est ouvert.
On a donc $\varepsilon>0$ tel que $B(\ell,\varepsilon)\subset {}^cF$.
Or on a un rang à partir duquel $x_n\in B(\ell,\varepsilon)$ ce qui est contradictoire.

($\Longleftarrow$) Par contraposée, si $F$ n'est pas fermée, ${}^cF$ n'est pas ouverte, donc on a $\ell\in {}^cF$ tel que pour tout $\varepsilon>0$, $B(\ell,\varepsilon)\not\subset {}^cF$ ie $B(\ell,\varepsilon)\cap F\neq\varnothing$.
Soit $n\in\mathbb{N}$. Avec $\varepsilon=\frac{1}{n+1}$, on a $x_n\in B\left(\ell,\frac{1}{n+1}\right)\cap F$ donc tel que $d(x_n,\ell)\leqslant\frac{1}{n+1}$.
Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in F^{\mathbb{N}}$ et $x_n\to\ell\notin F$. □

**Exemple**

$F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2\leqslant y\leqslant x\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

**Exercice : CCINP 41**

**Énoncer quatre théorèmes différents ou méthodes permettant de prouver qu'une partie d'un espace vectoriel normé est fermée et, pour chacun d'eux, donner un exemple concret d'utilisation dans $\mathbb{R}^2$.**
**Les théorèmes utilisés pourront être énoncés oralement à travers les exemples choisis.**

**Remarques :**

1. **On utilisera au moins une fois des suites.**
2. **On pourra utiliser au plus une fois le passage au complémentaire.**
3. **Ne pas utiliser le fait que $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble vide sont des parties ouvertes et fermées.**

---

1. Soit $E$ et $F$ deux espaces vectoriels normés.
Soit $f:E\longrightarrow F$ une application continue.
L'image réciproque d'un fermé de $F$ par $f$ est un fermé de $E$.
**Exemple** : $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ xy=1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ car c'est l'image réciproque du fermé $\{1\}$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue $f:\begin{array}{ll}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto xy\end{array}$.

2. Soit $E$ un espace vectoriel normé. Soit $F\subset E$.
$F$ est un fermé de $E$ si et seulement si $\complement_E F$ est un ouvert de $E$.
**Exemple** : $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x^2+y^2\geqslant 1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ car $\complement_{\mathbb{R}^2}B$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
En effet, $\complement_{\mathbb{R}^2}B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x^2+y^2<1\}=B_o(0,1)$ où $B_o(0,1)$ désigne la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 pour la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.
Puis, comme toute boule ouverte est un ouvert, on en déduit que $\complement_{\mathbb{R}^2}B$ est un ouvert.

3. Caractérisation séquentielle des fermés :
Soit $A$ une partie d'un espace vectoriel normé $E$.
$A$ est un fermé de $E$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n)$ à valeurs dans $A$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$, alors $x\in A$.
**Exemple** : $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ xy\geqslant 1\}$ est un fermé.
En effet, soit $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $C$ qui converge vers $(x,y)$.
$\forall\, n\in\mathbb{N}$, $x_ny_n\geqslant 1$, donc, par passage à la limite, $xy\geqslant 1$ donc $(x,y)\in C$.

4. Une intersection de fermés d'un espace vectoriel normé $E$ est un fermé de $E$.
**Exemple** : $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ xy\geqslant 1 \text{ et } x\geqslant 0\}$.
On pose $D_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ xy\geqslant 1\}$ et $D_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x\geqslant 0\}$.
D'après 3., $D_1$ est un fermé.
$D_2$ est également un fermé.
En effet, $D_2$ est l'image réciproque du fermé $[0,+\infty[$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue $f:\begin{array}{ll}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto x\end{array}$.
On en déduit que $D=D_1\cap D_2$ est un fermé de $E$.

**Remarque** :
On peut aussi utiliser le fait qu'un produit de compacts est un compact et qu'un ensemble compact est fermé.
Exemple : $E = [0;1] \times [2;5]$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
En effet, comme $[0;1]$ et $[2;5]$ sont fermés dans $\mathbb{R}$ et bornés, ce sont donc des compacts de $\mathbb{R}$.
On en déduit que $E$ est un compact de $\mathbb{R}^2$ donc un fermé de $\mathbb{R}^2$.

# 2 Adhérence, densité, intérieur

## a Points adhérents, adhérence

**Remarque**

Intuitivement, un point adhérent est un point dans $A$ ou « au bord » de $A$.

**Définition : Point adhérent**

Soit $A$ une partie de $E$ et $x \in E$. On dit que $x$ est adhérent à $A$ lorsque $\forall \varepsilon > 0,\quad B(x,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$.

**Propriété : Caractérisation séquentielle**

*$x$ est adhérent à $A$ si et seulement s'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $A$ qui converge vers $x$.*

**Démonstration**

($\Longrightarrow$) On suppose que $x$ est adhérent à $A$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Avec $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$, on a $a_n \in B\left(x, \frac{1}{n+1}\right) \cap A$ donc tel que $d(a_n, x) \leqslant \frac{1}{n+1}$.
Cela définit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \to a$.

($\Longleftarrow$) Si on a une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \to x$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a un rang à partir duquel $a_n \in B(a,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$. □

**Définition : Adhérence**

L'adhérence $\overline{A}$ de $A$ est l'ensemble des points adhérents à $A$.

**Remarques**

**R 1** – Ne pas confondre avec le complémentaire.

**R 2** – Intuitivement, « les points de $A$ et les points des bords ».

**Exemple**

| $E$ | $A$ | $\overline{A}$ |
|---|---|---|
| $\mathbb{R}$ | $\mathbb{Z}$ | $\mathbb{Z}$ |
| $\mathbb{R}$ | $\mathbb{Q}$ | $\mathbb{R}$ |
| $\mathbb{R}$ | $]0,1]$ | $[0,1]$ |
| $E$ | $B(a,r)$ | $\overline{B}(a,r)$ |

Pour la dernière, si $x \in \overline{B(a,r)}$, on a une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $B(a,r)$ telle que $x_n \to a$. Donc pour tout $n$, $d(x_n,a) < r$ et alors $d(x,a) \leqslant d(x,x_n) + d(x_n,a) < d(x,x_n) + r$. En passant à la limite, $d(x,a) \leqslant r$, donc $\overline{B(a,r)} \subset \overline{B}(a,r)$.

Réciproquement, si $x \in \overline{B}(a,r)$, soit $x_n = a + \left(1 - \frac{1}{n}\right)(x-a) \to x$ et $x_n \in B(a,r)$ donc, par caractérisation séquentielle, $x \in \overline{B(a,r)}$.

Finalement, $\overline{B(a,r)} = \overline{B}(a,r)$.

**Propriété**

*Si $A \subset B$, alors $\overline{A} \subset \overline{B}$.*

**Démonstration**

Caractérisation séquentielle. □

**Propriété : Caractérisation**

*$\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant $A$.*

**Démonstration**

**$\overline{A}$ est un fermé de $E$ contenant $A$ :** Par définition, on a bien $A \subset \overline{A}$. Puis on montre que ${}^c\overline{A}$ est ouvert.
Si $x \notin \overline{A}$, on a $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \cap A = \varnothing$. Si $y \in B(x, \varepsilon)$, $B(y, \varepsilon - d(x, y)) \cap A = \varnothing$ donc $y \notin \overline{A}$.

**Il est plus petit que les autres :** Si $F$ est un fermé contenant $A$, et si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $A \subset F$ convergente, alors sa limite est dans $F$ donc $\overline{A} \subset F$. □

**Propriété**

*$F$ est un fermé de $E$ si et seulement si $\overline{F} = F$.*

**Démonstration**

Si $F = \overline{F}$, $F$ est fermé d'après ce qui précède.
Si $F$ est fermé, on a déjà $F \subset \overline{F}$.
Puis, si $x \in \overline{F}$, $x$ est limite d'une suite d'éléments de $F$ donc $x \in \overline{F}$.

**Propriété**

*Si $A$ est un sous-espace vectoriel de $E$, alors $\overline{A}$ l'est aussi.*

**Démonstration**

Conséquence de la caractérisation séquentielle. □

**Exercice : CCINP 34**

**Soit $A$ une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé $E$.**

1. **Rappeler la définition d'un point adhérent à $A$, en termes de voisinages ou de boules.**
2. **Démontrer que : $x \in \overline{A} \iff \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $x_n \to x$.**
3. **Démontrer que, si $A$ est un sous-espace vectoriel de $E$, alors $\overline{A}$ est un sous-espace vectoriel de $E$.**
4. **Démontrer que si $A$ est convexe alors $\overline{A}$ est convexe.**

---

1. Soit $A$ une partie non vide de $E$.
   $\mathcal{V}(a)$ désigne l'ensemble des voisinages de $a$.
   $\forall r > 0$, $B_0(a, r)$ désigne la boule ouverte de centre $a$ et de rayon $r$.
   Soit $a \in A$.

   $a \in \bar{A} \iff \forall V \in \mathcal{V}(a), V \cap A \neq \varnothing$.
   Ou encore :
   $a \in \bar{A} \iff \forall r > 0, B_0(a, r) \cap A \neq \varnothing$.

2. Soit $x \in \overline{A}$.
   Prouvons que $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$.
   Par hypothèse, $\forall r > 0$, $B_0(a, r) \cap A \neq \varnothing$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B_0(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \varnothing$.
C'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_n \in B_0(x, \frac{1}{n}) \cap A$.
On fixe alors, pour tout entier naturel $n$ non nul, un tel $x_n$.
Ainsi, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite à valeurs dans $A$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|x_n - x\| < \frac{1}{n}$.
C'est-à-dire la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $x$.
Soit $x \in E$. On suppose que $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

Prouvons que $x \in \bar{A}$.
Soit $V \in \mathcal{V}(x)$. Alors, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $B_0(x,\varepsilon) \subset V$.
On fixe un tel $\varepsilon$ strictement positif.
$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ donc $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Longrightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon$.
On fixe un tel entier $N$.
Donc, comme $(x_n)$ est à valeurs dans $A$, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Longrightarrow x_n \in B_0(x,\varepsilon) \cap A$.
Or $B_0(x,\varepsilon) \subset V$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Longrightarrow x_n \in V \cap A$, c'est-à-dire $V \cap A \neq \varnothing$.
On peut en conclure que $x \in \bar{A}$.

3. $\bar{A} \subset E$ et $0_E \in \bar{A}$ car $0_E \in A$ et $A \subset \bar{A}$.
Soit $(x,y) \in \left(\bar{A}\right)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
D'après 1., Il existe deux suites $(x_n)$ et $(y_n)$ d'éléments de $A$ convergeant respectivement vers $x$ et $y$.
On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n + \lambda y_n) = x + \lambda y$.
Or $A$ est un sous-espace vectoriel de $E$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $(x_n, y_n) \in A^2$ , donc $x_n + \lambda y_n \in A$.
On en déduit que la suite $(x_n + \lambda y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $A$ et converge vers $x + \lambda y$.
On a bien $x + \lambda y \in \bar{A}$.

4. On suppose que $A$ partie non vide et convexe de $E$. Prouvons que $\overline{A}$ est convexe.
Soit $(x,y) \in \left(\overline{A}\right)^2$. Soit $t \in [0,1]$.
Prouvons que $z = tx + (1-t)y \in \overline{A}$.
$x \in \overline{A}$, donc il existe une suite $(x_n)$ à valeurs dans $A$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
$y \in \overline{A}$, donc il existe une suite $(y_n)$ à valeurs dans $A$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$.
On pose $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = tx_n + (1-t)y_n$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A$, $y_n \in A$ et $A$ est convexe, donc $z_n \in A$. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = z$.
Donc $z$ est limite d'une suite à valeurs dans $A$, c'est-à-dire $z \in \overline{A}$.

**Exercice : CCINP 44**

**Soit $E$ un espace vectoriel normé. Soient $A$ et $B$ deux parties non vides de $E$.**

1. **(a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.**
   **(b) Montrer que :** $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
2. **Montrer que :** $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
   **Remarque : une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.**
3. **(a) Montrer que :** $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
   **(b) Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).**

---

Soit $E$ un espace vectoriel normé. On note $A$ et $B$ deux parties non vides de $E$.

1. (a) $x \in \overline{A}$ si et seulement si il existe une suite à valeurs dans $A$ qui converge vers $x$.
   (b) On suppose $A \subset B$. Prouvons que $\overline{A} \subset \overline{B}$.
   Soit $x \in \overline{A}$.
   Il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x$.
   Or $A \subset B$, donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in B$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x$ .
   Donc $x \in \overline{B}$.
2. D'après la question précédente,
   $A \subset A \cup B$, donc $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$.
   $B \subset A \cup B$, donc $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.
   Donc $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.
   Prouvons que $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
   Soit $x \in \overline{A \cup B}$.
   Il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in A \cup B$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x$.
   On considère les ensembles $A_1 = \{n \in \mathbb{N} \text{ tels que } u_n \in A\}$ et $A_2 = \{n \in \mathbb{N} \text{ tels que } u_n \in B\}$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in A \cup B$, $A_1$ ou $A_2$ est de cardinal infini.
On peut donc extraire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $A$ ou une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $B$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = x$.
Donc $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.
**Remarque** :On peut aussi prouver que $\overline{A\cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ sans utiliser les suites :

$\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont fermés, donc $\overline{A}\cup\overline{B}$ est un fermé contenant $A\cup B$. Or $\overline{A\cup B}$ est le plus petit fermé contenant $A\cup B$, donc $\overline{A\cup B} \subset \overline{A}\cup\overline{B}$.

3. (a) D'après la question 1. ,
$A\cap B \subset A$, donc $\overline{A\cap B} \subset \overline{A}$.
$A\cap B \subset B$, donc $\overline{A\cap B} \subset \overline{B}$.
Donc $\overline{A\cap B} \subset \overline{A}\cap\overline{B}$.
**Autre méthode** :

Comme $A \subset \overline{A}$ et $B \subset \overline{B}$ alors $A\cap B \subset \overline{A}\cap\overline{B}$.
Comme $\overline{A}\cap\overline{B}$ est un fermé contenant $A\cap B$, alors par minimalité de $\overline{A\cap B}$, on a $\overline{A\cap B} \subset \overline{A}\cap\overline{B}$.

(b) $A = ]0,1[$ et $B = ]1,2[$.
$\overline{A\cap B} = \varnothing$ et $\overline{A}\cap\overline{B} = \{1\}$.

**Exercice : CCINP 45**

**Les questions 1. et 2. sont indépendantes.**
**Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Soit $A$ une partie non vide de $E$.**
**On note $\overline{A}$ l'adhérence de $A$.**

1. **(a) Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.**
   **(b) Prouver que, si $A$ est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.**
2. **On pose :** $\forall x \in E$, $d_A(x) = \inf\limits_{a\in A} \|x-a\|$.
   **(a) Soit $x \in E$. Prouver que $d_A(x) = 0 \Longrightarrow x \in \overline{A}$.**
   **(b) On suppose que $A$ est fermée et que :** $\forall (x,y) \in E^2$, $\forall t \in [0,1]$, $d_A(tx+(1-t)y) \leqslant t d_A(x) + (1-t) d_A(y)$.
   **Prouver que $A$ est convexe.**

---

1. (a) Soit $A$ une partie d'un ensemble $E$.
$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow$ il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $A$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

(b) On suppose que $A$ est une partie non vide et convexe de $E$. Prouvons que $\overline{A}$ est convexe.
Soit $(x,y) \in \left(\overline{A}\right)^2$. Soit $t \in [0,1]$.
Prouvons que $z = tx + (1-t)y \in \overline{A}$.
$x \in \overline{A}$ donc, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $A$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
$y \in \overline{A}$ donc, il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $A$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$.
On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = t x_n + (1-t) y_n$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A$, $y_n \in A$ et $A$ est convexe, donc $z_n \in A$. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = z$.
Donc $z$ est limite d'une suite à valeurs dans $A$, c'est-à-dire $z \in \overline{A}$.

2. (a) Soit $A$ une partie non vide de $E$. Soit $x \in E$ tel que $d_A(x) = 0$.
Par définition de la borne inférieure, nous avons : $\forall \epsilon > 0$, $\exists a \in A$ tel que $\|x-a\| < \epsilon$.
Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, pour $\epsilon = \dfrac{1}{n}$, il existe $a_n \in A$ tel que $\|x - a_n\| < \frac{1}{n}$.
Alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi construite est à valeurs dans $A$ et converge vers $x$, donc $x \in \overline{A}$.

(b) On suppose que $A$ est fermée et que, $\forall (x,y) \in E^2$, $\forall t \in [0,1]$, $d_A(tx+(1-t)y) \leqslant t d_A(x) + (1-t) d_A(y)$.
Soit $(x,y) \in (A)^2$. Soit $t \in [0,1]$.
Prouvons que $z = tx + (1-t)y \in A$.
Par hypothèse, on a $d_A(z) \leqslant t d_A(x) + (1-t) d_A(y)$. (1)
Or $x \in A$ et $y \in A$, donc $d_A(x) = d_A(y) = 0$ et donc, d'après (1), $d_A(z) = 0$.
Alors, d'après 2.(a), $z \in \overline{A}$. Or $A$ est fermée, donc $\overline{A} = A$ et donc $z \in A$.

### b Densité

**Définition : Densité**

$D$ est **dense** dans $E$ lorsque $\overline{D} = E$, c'est-à-dire lorsque toute boule ouverte rencontre $D$.

**Propriété : Caractérisation séquentielle**

*$D$ est dense dans $E$ si et seulement si tout élément de $E$ est limite d'une suite d'élément de $D$.*

**Exemples**

**E 1 –** $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{D}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

**E 2 –** Théorème de Weierstraß : le sous espace des fonctions polynomiales sur $[a,b]$ est dense dans $(\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}), N_\infty)$ (donc a fortiori dans $(\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}), N_1)$ et $(\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}), N_2)$.

Le sous espace des fonctions en escalier sur $[a,b]$ est dense dans $(\mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{K}), N_\infty)$ (donc a fortiori dans $(\mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{K}), N_1)$ et $(\mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{K}), N_2)$.

### c Intérieur

**Définition**

Soit $A$ une partie de $E$, $x \in E$.

$x$ est un **point intérieur** à $A$ lorsque $A$ est un voisinage de $x$, c'est-à-dire qu'il existe une boule ouverte centrée en $x$ incluse dans $A$.

L'ensemble des points intérieurs à $A$ est appelé **intérieur** de $A$, noté $\mathring{A}$.

**Propriété**

*Si $A \subset B$, alors $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.*

**Propriété : Caractérisation**

*$\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans $A$.*

**Démonstration**

**$\mathring{A}$ est un ouvert de $E$ contenu dans $A$ :** Par définition, on a bien $\mathring{A} \subset A$. Puis, si $x \in \mathring{A}$, on a $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset A$. Mais si $y \in B(x,\varepsilon)$ qui est ouverte, alors $B(x,\varepsilon)$ est un voisinage de $y$ donc $A$ est un voisinage de $y$, donc $B(x,\varepsilon) \subset \mathring{A}$.

**Il est plus grand que les autres :** Si $\mathscr{O}$ est un ouvert contenu dans $A$, alors $\mathscr{O}$ est voisinage de tous ses points donc $\mathscr{O} \subset \mathring{A}$. □

**Propriété**

*$\mathscr{O}$ est ouvert si et seulement si $\mathring{\mathscr{O}} = \mathscr{O}$.*

**Démonstration**

Si $\mathring{\mathscr{O}} = \mathscr{O}$, alors $\mathscr{O}$ est ouvert d'après ce qui précède.
Puis, d'après la caractérisation, $\mathring{\mathscr{O}} \subset \mathscr{O}$ et si $\mathscr{O}$ est ouvert, $\mathscr{O} \subset \mathring{\mathscr{O}}$. □

**Exemples**

**E 1 –** $\mathring{\mathbb{Q}} = \varnothing$ : $\mathbb{Q}$ ne contient pas d'intervalles ouverts non vides.

**E 2 –** $\overbrace{\overline{B}(a,r)}^{\circ} = B(a,r)$ : $B(a,r)$ est un ouvert contenu dans $\overline{B}(a,r)$, donc $B(a,r) \subset \overbrace{\overline{B}(a,r)}^{\circ}$, et $\overbrace{\overline{B}(a,r)}^{\circ} \subset \overline{B}(a,r)$, mais si $x \in S(a,r)$, $\overline{B}(a,r)$ n'est pas un voisinage de $x$, donc $x \notin \overbrace{\overline{B}(a,r)}^{\circ}$ donc $\overbrace{\overline{B}(a,r)}^{\circ} \subset B(a,r)$

### d Frontière

**Définition : Frontière**

On appelle **frontière** de $A$ l'ensemble $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

**Exemples**

**E 1 –** $\mathrm{Fr}(B(a,r)) = S(a,r)$.

**E 2 –** $\mathrm{Fr}([0,1[) = \{0,1\}$.

**E 3 –** $\mathrm{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

**Remarque**

$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap {}^c\mathring{A}$ est fermé.

## 3 Ouverts, fermés, voisinages relatifs

On se fixe une partie $A$ non vide de $E$.

### a Voisinage relatif

**Définition : Voisinage relatif**

Soit $a \in A$. On appelle **voisinage relatif de $a$ dans** $A$ toute partie $V'$ de $A$ s'écrivant $V' = A \cap V$ où $V$ est un voisinage de $a$.

**Remarques**

**R 1 –** Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a,\varepsilon) \cap A \subset V'$.

**R 2 –** $V'$ n'est pas nécessairement un voisinage de $a$ dans $E$.
Par exemple $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ est un voisinage de $0$ dans $[0,1[$ mais pas dans $\mathbb{R}$.

### b Ouverts relatifs

**Définition : Ouvert relatif**

Une partie $\mathcal{O}'$ de $A$ est un **ouvert relatif de** $A$ (ou **pour la topologie induite sur** $A$) lorsqu'il existe un ouvert $\mathcal{O}$ tel que $\mathcal{O}' = \mathcal{O} \cap A$.

**Remarques**

**R 1 –** $\mathcal{O}'$ est un voisinage **relatif** de chacun de ses points dans $A$.

**R 2 –** $\mathcal{O}'$ ouvert relatif de $A$ si et seulement si pour tout $x \in \mathcal{O}'$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \cap A \subset \mathcal{O}'$.

**Exemple**

$\left[0, \frac{1}{2}\right[$ est un ouvert de $[0,1]$.

**Remarque**

Si $A$ est ouvert, les ouverts relatifs de $A$ sont les ouverts.

### c Fermés relatifs

**Définition : Fermé relatif**

Une partie $F'$ de $A$ est un fermé **relatif de** $A$ s'il existe une fermé $F$ tel que $F' = F \cap A$.

**Remarques**

**R 1** – Le complémentaire **dans** $A$ de $F'$ est un ouvert relatif **de** $A$.

**R 2** – Si $A$ est fermé, les fermés relatifs de $A$ sont les fermés.

**Propriété : Caractérisation séquentielle**

*Soit $F'$ une partie de $A$.*

*$F'$ fermé relatif de $A$ si et seulement si $F'$ est une partie de $A$ telle que toute suite d'éléments de $F'$ convergeant **dans** $A$ a sa limite dans $F'$.*

**Démonstration**

Si $F'$ est un fermé relatif de $A$, alors $F' = F \cap A$ où $F$ est fermé. Si $(x_n) \in F'^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \to \ell \in A$, alors comme $F$ est fermé, $\ell \in F$ donc $\ell \in F'$.

Si toute suite d'éléments de $F'$ convergeant dans $A$ a sa limite dans $F'$, soit $F = \overline{F'}$, fermé de $E$. Montrons que $F' = F \cap A$.

On a déjà $F' \subset F \cap A$. Puis, si $x \in F \cap A = \overline{F'} \cap A$, on a une suite d'éléments de $F'$ convergeant vers $x \in A$ donc $x \in F'$. □

## d Densité

**Définition : Densité dans une partie**

Soit $B$ partie de $A$. $B$ est **dense dans** $A$ si et seulement si $A \subset \overline{B}$ si et seulement si tout élément de $A$ est limite d'une suite d'éléments de $B$.