chapitreXIX

Probabilités

I Espace probabilisé

1 Tribu

Définition : Tribu

Soit Ω un ensemble. On appelle **tribu** sur Ω toute partie $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ telle que

(i) $\varnothing \in \mathscr{A}$

(ii) **Stabilité par passage au complémentaire** : $A \in \mathscr{A} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathscr{A}$

(iii) **Stabilité par réunion dénombrable** : Si $(A_n)_n$ est une suite d'éléments de A, $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$

Le couple $(\Omega, \mathscr{A})$ est appelé **espace probabilisable**, et les éléments de $\mathscr{A}$ ses **événements**.

Le vocabulaire vu en première année reste valable :

- Si $A \in \mathscr{A}$, $\overline{A}$ est l'**événement contraire** (qui est bien un événement).
- L'événement $\varnothing$ est appelé **événement impossible**.
- On dit que deux événements A et B sont **incompatibles** lorsque $A \cap B = \varnothing$.

Ne pas confondre issue/résultat/réalisation et événement !

Propriété

Une tribu est stable par réunion finie, par intersection dénombrable, par intersection finie.

Ainsi dit, si $\mathscr{A}$ est une tribu sur ω,

(i) $\Omega \in \mathscr{A}$

(ii) *Si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'éléments de* $\mathscr{A}$, $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$

(iii) $(A \in \mathscr{A}$ et $B \in \mathscr{A}) \Rightarrow (A \cup B \in \mathscr{A})$

(iv) $(A \in \mathscr{A}$ et $B \in \mathscr{A}) \Rightarrow (A \cap B \in \mathscr{A})$

(v) *Si* $(A_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ *est une famille finie d'éléments de* $\mathscr{A}$, $\bigcup_{n=0}^{N} A_n \in \mathscr{A}$

(vi) *Si* $(A_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ *est une famille finie d'éléments de* $\mathscr{A}$, $\bigcap_{n=0}^{N} A_n \in \mathscr{A}$

2 Probabilité

Définition : Probabilité

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. Une **probabilité** sur $(\Omega, \mathscr{A})$ est une application $\mathbb{P}$ définie sur $\mathscr{A}$ telle que

(i) $\forall A \in \mathscr{A} \quad \mathbb{P}(A) \in [0,1]$

(ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(iii) **σ-additivité** : Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux disjoints (incompatibles), $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge et $\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

On dit alors que le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est un **espace probabilisé**.

Propriété

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, A et B des événements.

(i) $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

(ii) *Si A et B sont deux événements incompatibles,* $\mathbb{P}(A \sqcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Plus généralement, $\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n=0}^{N} A_n\right) = \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(A_n)$.

(iii) *Si* $A \subset B$, $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$. *Si A et B sont quelconques,* $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

(iv) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

(v) ***Croissance*** : *si* $A \subset B$, $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.

Propriété

Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille finie ou dénombrable d'événements deux à deux incompatibles, alors $(\mathbb{P}(A_i))_{i\in I}$ est sommable et $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$.

3 Cas très simple : univers fini

Si Ω est fini, on prend généralement $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$, et la propriété de σ-additivité est équivalente à la propriété

Si A et B sont deux événements disjoints, alors
$$P(A \sqcup B) = P(A) + P(B).$$

Propriété

Si $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$, $\mathbb{P}$ est entièrement définie par la donnée des $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_{\omega_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, qui forment une famille de réels positifs dont la somme vaut 1. Et, pour toute partie A de Ω,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in A} p_\omega$$

Les probabilités des événements élémentaires déterminent donc P.

4 Cas simple : univers dénombrable

Ici, on garde la propriété de σ-additivité, que l'on ne peut plus remplacer par la simple additivité

Ici encore, il n'y a pas d'obstacle à prendre la tribu « discrète », c'est-à-dire $\mathscr{P}(\Omega)$. On obtient :

Propriété

Soit Ω un ensemble dénombrable. Pour toute famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de réels positifs sommable et de somme 1, il existe une unique probabilité sur $\mathscr{P}(\Omega)$ telle que

$$\forall \omega \in \Omega \qquad \mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$$

Cette probabilité vérifie

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega) \qquad \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} p_\omega$$

Donc, encore une fois, $\mathbb{P}$ est définie de manière unique par les probabilités des singletons. Pour un univers fini ou dénombrable, les tribus d'évènements n'ont donc pas grand intérêt.

5 Cas moins simple : univers non dénombrable

Dans le cas où l'univers est infini indénombrable c'est plus compliqué : on peut montrer que pour un tirage à pile ou face infini non dénombrable, modélisé par $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (non dénombrable par argument diagonal de Cantor), la seule valeur possible pour le probabilité d'un événement élémentaire est... 0.

Pourquoi ? Intuitivement, si la probabilité d'obtenir un pile est $p \in]0,1[$, alors la probabilité d'obtenir n piles de suite de va être $p^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$...

C'est donc moins simple, on en peut pas se contenter des événements élémentaires, mais complètement hors-programme.

6 Continuités croissante et décroissante

Propriété : Continuité croissante

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante (pour l'inclusion) d'événements :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad A_n \subset A_{n+1}$$

Alors

$$\mathbb{P}(A_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

Corollaire

Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite quelconque d'événements, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{k} A_n\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

Propriété : Continuité décroissante

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante (pour l'inclusion) d'événements :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad A_{n+1} \subset A_n$$

Alors

$$\mathbb{P}(A_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

Corollaire

Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite quelconque d'événements, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{k} A_n\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

7 Inégalité de Boole

Propriété

Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite quelconque d'événements. Alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

8 Négligeabilité

Définition

On dit qu'un événement A est **négligeable** lorsque $\mathbb{P}(A) = 0$.

Propriété

Une réunion finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable.

Propriété

Si A et B sont deux événements tel que $A \subset B$, si B est négligeable, A l'est.

Définition

Un événement A est **presque sûr**, ou **presque certain**, lorsque $\mathbb{P}(A) = 1$, ce qui équivaut à dire que $\overline{A}$ est négligeable.

Une propriété est dite **presque sûre** lorsque l'ensemble des éléments de Ω qui ont cette propriété est un événement presque sûr.

II Conditionnement et indépendance

1 Conditionnement

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, B un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. Pour tout événement $A \in \mathscr{A}$, on définit la **probabilité conditionnelle de A sachant B** par

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

(*Se lit en général « $\mathbb{P}$ de A sachant B »*)

Propriété

$\mathbb{P}_B : A \in \mathscr{A} \mapsto \mathbb{P}(A|B)$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

2 Probabilités composées

Théorème : Formule des probabilités composées

Soit $n \geqslant 2$, $A_1, \dots, A_n$ des événements de l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$.

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2 \mid A_1) \times \mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \times \dots \times \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

3 Probabilités totales

Définition : Système complet d'événements

Soit (Ω, P) un espace probabilisé, I un ensemble fini ou dénombrable. On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements est un **système complet d'événements** lorsque

$$(i \neq j) \implies (A_i \cap A_j = \varnothing) \quad \text{et} \quad \bigsqcup_{i\in I} A_i = \Omega$$

Propriété : Formule des probabilités totales

Si $(A_i)_{i\in I}$ où I est fini ou dénombrable est un système complet d'événements, alors pour tout événement B,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B \cap A_i)$$

Si, de plus, pour tout i, $\mathbb{P}(A_i) > 0$, $\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B \mid A_i)\mathbb{P}(A_i) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)$.

Si certains événements sont négligeables, alors les $B \cap A_i$ le seront aussi et il suffit de remplacer la somme pour $i \in I$ par la somme pour $i \in J = \{i \in I,\ \mathbb{P}(A_i) > 0\}$.

4 Formule de Bayes

Propriété

Si A, B sont des événements non négligeables, alors

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\ \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Si, de plus, $\overline{A}$ n'est pas négligeable,

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\ \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B \mid A)\ \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(B \mid \overline{A}\right)\ \mathbb{P}\left(\overline{A}\right)}.$$

Plus généralement, si $(A_i)_{i\in I}$ (I fini ou dénombrable) est un système complet d'événements non négligeables, on a

$$\forall i \in I \qquad \mathbb{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A_i)\ \mathbb{P}(A_i)}{\sum_{k\in I} \mathbb{P}(B \mid A_k)\mathbb{P}(A_k)}.$$

III Événements indépendants

1 Couple d'événements indépendants

Définition : Indépendance de deux événements

Deux événements A et B d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ sont dits **indépendants** lorsque

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

On note parfois $A \perp\!\!\!\perp B$ lorsque A et B sont indépendants.

Propriété

Deux événements A et B d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ tels que $\mathbb{P}(B) > 0$ sont ***indépendants*** *si et seulement si $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$.*

Naturellement, si deux événements sont indépendants, leurs complémentaires le sont. Plus précisément :

Propriété

Si deux événements A et B d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ sont indépendants, alors

- *A et $\overline{B}$ sont indépendants,*
- *$\overline{A}$ et B sont indépendants,*
- *$\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.*

2 Famille d'événements indépendants

Définition

Soit $(A_i)_{i\in I}$ avec I fini ou dénombrable une famille d'événements.

- Les A_i sont dit **deux à deux indépendants** lorsque pour tout $i \neq j$, A_i et A_j sont indépendant, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$.
- Les A_i sont dit **indépendants**, ou **mutuellement indépendants**, lorsque pour toute partie **finie** J de I,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) = \prod_{i\in J} \mathbb{P}(A_i).$$

Propriété

Si les A_i sont mutuellement indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants.

La réciproque est fausse si $n \geqslant 3$.

Propriété

Si les événements A_i pour $i \in I$ sont mutuellement indépendants et si pour tout $i \in I$ on pose $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$, alors les B_i sont mutuellement indépendants.