chapitre

Séries entières

I Convergence des séries entières

1 Définition

Définition : Série entière

On appelle série entière toute série de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite de nombres complexes et z un nombre complexe.

2 Convergence ponctuelle, rayon de convergence

a Lemme d'Abel

Propriété : Lemme d'Abel

Soit $r \in \mathbb{R}^+$. Si la suite $(a_n r^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée, alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

b Rayon de convergence

Propriété

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière. Il existe $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ unique tel que

- *Si $|z| < R$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est absolument convergente.*
  (ce cas ne se produit pas si $R = 0$.)
- *Si $|z| > R$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est (très) grossièrement divergente : la suite $(a_n z^n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas bornée, et donc a fortiori ne converge pas vers 0.*
  (ce cas ne se produit pas si $R = +\infty$.)

Définition : Rayon et disque ouvert de convergence

R est appelé le **rayon de convergence** de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

$D(0,R) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < R\}$ est le **disque ouvert de convergence** de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

Si $R = +\infty$, ce disque ouvert est $\mathbb{C}$. Si $R = 0$, c'est $\varnothing$. Sinon, c'est un « vrai » disque.

c Méthodes de détermination pratique du rayon de convergence

Méthode : Utilisation du critère de d'Alembert

Typiquement utilisé pour la plupart des déterminations de rayons de convergence dans les énoncés d'écrit.

Il faut être bien attentif, lors de la rédaction, à n'appliquer le critère de d'Alembert qu'à des séries à termes réels strictement positifs.

Propriété : Rappel

*Soit (u_n) suite **à termes réels strictement positifs** tel que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \in [0,+\infty].$$

- *Si $\ell > 1$, $\sum u_n$ diverge (très) grossièrement (et même $u_n \to +\infty$).*
- *Si $\ell < 1$, $\sum u_n$ converge.*
- *Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire en général (cas douteux).*

Méthode : Une remarque qui résout tout

Si on a la chance de trouver

- un z tel que $\sum a_n z^n$ converge, mais non absolument,
- un z tel que la suite $(a_n z^n)$ soit bornée mais la série $\sum a_n z^n$ diverge,

on est sûr que $R = |z|$.

Méthode : Suites bornées, convergence vers zéro

Les exercices les plus délicats de détermination de rayons de convergence se font en utilisant plutôt les suites bornées et les deux considérations suivantes (penser au dessin avec le disque de convergence) :

- Si la suite $(a_n z^n)$ est bornée, alors $|z| \leqslant R$
- Si la suite $(a_n z^n)$ est non bornée, alors $|z| \geqslant R$.

Mais aussi

- Si la suite $(a_n z^n)$ converge vers 0, alors $|z| \leqslant R$.
- Si la suite $(a_n z^n)$ ne converge pas vers 0, alors $|z| \geqslant R$.

d Comparaison de rayons de convergence

Propriété

On note R_a et R_b les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.

Alors,

- *si $|a_n| \leqslant |b_n|$, ou $a_n = b_n$ ou plus généralement $a_n = b_n$,*
$$R_a \geqslant R_b.$$
- *et si $a_n \sim b_n$,*
$$R_a = R_b.$$

Propriété

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels ou complexes. Les séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Corollaire

Si $k \in \mathbb{N}$, les séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^k a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^k} z^n$ ont même rayon de convergence que $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

3 Convergence normale

Propriété

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$, $f_n : z \mapsto a_n z^n$.

Alors $\sum f_n$ convergence normalement, donc uniformément sur tout disque fermé inclus dans $D(0,R)$.

II Opérations algébriques sur les séries entières

1 Combinaisons linéaires

Propriété : Somme de deux séries entières

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. On note R_{a+b} le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} (a_n+b_n) z^n$. Alors

$$R_{a+b} \geqslant \min(R_a, R_b).$$

De plus, $\forall z \in D\big(0, \min(R_a,R_b)\big)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n+b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

Enfin, si $R_a \neq R_b$, on a $R_{a+b} = \min(R_a, R_b)$.

Propriété : Multiplication par un scalaire

Si λ est un nombre complexe non nul, le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} (\lambda a_n) z^n$ est égal au rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

2 Produits de Cauchy

Propriété

On considère deux séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

La série entière produit de Cauchy de ces deux séries entières est la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n z^n$ où, pour tout entier naturel n, $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Notons R_c son rayon de convergence. Alors

$$R_c \geqslant \min(R_a, R_b)$$

et $\forall z \in D\big(0, \min(R_a,R_b)\big)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

3 Séparation des termes d'ordre pair et impair

III Série entière d'une variable réelle

Dorénavant, on considère des séries entière de la variable réelle : on étudie la série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : x \mapsto a_n x^n$.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être une suite de nombres réels ou complexes, mais x reste réel.

Le disque ouvert de convergence devient intervalle ouvert de convergence $]-R,R[$ et on a $\boxed{]-R,R[\subset D_f \subset [-R,R]}$, où R est le rayon de convergence.

On ne peut rien dire en général en $\pm R$.

1 Classe de la somme d'une série entière

Propriété

Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$, et $f_n : x \mapsto a_n x^n$.

Si $R>0$, $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément sur tout segment inclus dans $]-R,R[$.

Corollaire

La somme d'une série entière de rayon de convergence R est continue sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R,R[$.

Propriété

On suppose que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ a un rayon de convergence $R>0$. Alors $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$, et se dérive terme à terme sur cet intervalle : pour tout $k \geqslant 1$, pour tout $x \in]-R,R[$, on peut écrire

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(p+k)!}{p!} a_{p+k} x^p$$

(toutes ces séries ayant le même rayon de convergence R).

On a alors $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

2 Primitivation de la somme d'une série entière

Propriété

On suppose que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ a un rayon de convergence $R>0$. Alors les primitives de $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-R,R[$ sont données par

$$F : x \mapsto F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

(Cette série entière ayant encore pour rayon de convergence R).

IV Fonctions développables en série entière

1 Définition

Définition

Soit $r>0$, f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie au moins sur $]-r,r[$; on dit que f est développable en série entière sur $]-r,r[$ lorsqu'il existe une série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence au moins égal à r telle que

$$\forall x\in]-r,r[\qquad f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

2 Stabilité

Propriété

Toute combinaison linéaire, tout produit, la dérivée, toute primitive d'une fonctions développables en série entière sur $]-r,r[$ le sont.

3 Condition nécessaire, série de Taylor

Définition : Série de Taylor

Soit f une fonction d'une variable réelle, à valeurs réelles ou complexes, de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0 (i.e. de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur au moins un certain intervalle $]-\delta,\delta[$ avec $\delta>0$). On appelle **série de Taylor de** f la série entière

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Propriété : condition nécessaire et unicité

Si f est développable en série entière sur $]-r,r[$ ($r>0$), elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r,r[$ et somme de sa série de Taylor sur cet intervalle (cette série de Taylor a donc un rayon de convergence au moins égal à r).

Il y a donc unicité du développement en série entière s'il existe.

Propriété : Unicité du DSE

Si $\forall x\in]-r,r[\qquad f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ (on suppose $r>0$, et on suppose que les rayons de convergence de chacune des séries sont $\geqslant r$), alors

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad a_n=b_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

4 Critère de développabilité en série entière

Propriété

Soit f une fonction de classe C^∞ sur $]-r,r[$ ($r>0$), à valeurs réelles ou complexes.

On note, pour tout $x\in]-r,r[$, $R_n(x)=f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$.

Alors f est développable en série entière sur $]-r,r[$ si et seulement si, pour tout x dans $]-r,r[$, la suite $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

V Développements en séries entières des fonctions usuelles

1 Fonctions d'une variable complexe

a Exponentielle complexe

Propriété

Pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$$\exp(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}\qquad (R=+\infty)$$

Corollaire

Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$,

$$\exp(z+z')=\exp(z)\ \exp(z').$$

b Série géométrique

Propriété

Pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$, $\dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$ $(R=1)$.

2 Exponentielle réelle

Propriété

La fonction $x\mapsto \mathrm{e}^x$ (c'est-à-dire l'unique solution de l'équation différentielle $y'=y$ qui prend en 0 la valeur 1) est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad \mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}.\qquad (R=+\infty)$$

3 Fonctions trigonométriques et hyperboliques

Propriété

Les fonctions $\sin$, $\cos$, ch, sh sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$ ($R=+\infty$), et

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \cos x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\qquad \sin x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \mathrm{ch}\, x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},\qquad \mathrm{sh}\, x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

4 Fonctions $x \mapsto (1+x)^\alpha$

Propriété

Pour tout α réel, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ ($R=1$).

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Si $\alpha \in \mathbb{N}$, le développement est valable dans $\mathbb{R}$ ($R=+\infty$).

Propriété

En particulier, pour tout $x \in]-1,1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ et $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$. ($R=1$)

5 $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \ln(1-x)$

Propriété

$x \mapsto \ln(1-x)$ et $x \mapsto \ln(1+x)$ sont développables en série entière sur $]-1,1[$ ($R=1$) et

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-x^n}{n}$$

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

6 Arctan, Arcsin

Propriété

Arctan est développable en série entière sur $]-1,1[$ ($R=1$) et

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

VI Quelques méthodes

1 Développements en séries entières

Méthode

1. Utilisation des DSE de fonctions usuelles : opérations usuelles, intégration, dérivation, produit de Cauchy.
2. Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.
3. Utilisation d'une équation différentielle (voir preuve pour $(1+x)^\alpha$) :
   (a) Supposer (analyse) avoir une fonction DSE avec un rayon $R>0$.
   (b) Traduire le fait qu'elle soit solution de l'équation différentielle.
   (c) En déduire ses cœfficients par unicité de ceux-ci (en général, on a une relation de récurrence).
   (d) Vérifier qu'effectivement, le rayon est >0 (synthèse).
   (e) Exprimer éventuellement la solution avec les fonctions usuelles.

2 Calcul de somme d'une série entière

Méthode : Utilisation les DSE des fonctions usuelles

1. Si $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul, pour calculer la somme des séries entière $\sum P(n)x^n$ et $\sum \frac{P(n)}{n!} x^n$, on décompose P dans la base $(Q_k)_k$ où $Q_0 = 1$, $Q_1 = X$, et pour tout k, $Q_k = X(X-1)\cdots(X-k+1)$, afin de faire apparaître des séries entières dérivées ou primitivées.
2. Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.
3. Intégration ou dérivation terme à terme.