chapitre

Séries entières

Extrait du programme officiel :

Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :

— *étudier la convergence d'une série entière et les propriétés de sa somme ;*

— *introduire la notion de développement d'une fonction en série entière ;*

— *établir les développements en série entière des fonctions usuelles.*

Les coefficients des séries entières considérées sont réels ou complexes.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Série entière.	
Lemme d'Abel : si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $\lvert z\rvert < \lvert z_0\rvert$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.	
Rayon de convergence d'une série entière.	Disque ouvert de convergence ; intervalle ouvert de convergence.
La convergence est normale sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon strictement inférieur à R ; la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement pour tout z tel que $\lvert z\rvert > R$. Si $a_n = O(b_n)$, $R_a \geqslant R_b$. Si $a_n \sim b_n$, $R_a = R_b$.	
Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.	
Utilisation de la règle de d'Alembert.	
Continuité de la somme d'une série entière sur le disque ouvert de convergence.	L'étude des propriétés de la somme au bord du disque ouvert de convergence n'est pas un objectif du programme.
Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.	
b) Série entière d'une variable réelle	
Primitivation d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.	
La somme d'une série entière est de classe C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.	
Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif à l'aide des dérivées en 0 de sa somme.	Si les fonctions $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ coïncident sur un voisinage de 0, alors pour tout n, $a_n = b_n$.
c) Fonctions développables en série entière, développements usuels	
Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$.	
Développement de $\frac{1}{1-z}$ sur $\{z \in \mathbb{C},\ \lvert z\rvert < 1\}$.	
Fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ de $\mathbb{R}$. Série de Taylor d'une fonction de classe C^∞ sur un intervalle $]-r, r[$.	
Développements de fonctions de variable réelle.	Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions exponentielle, hyperboliques, circulaires, Arctan, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$. Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire.

Table des matières

Séries entières

I Convergence des séries entières

1 Définition

Définition : Série entière

On appelle série entière toute série de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite de nombres complexes et z un nombre complexe.

2 Convergence ponctuelle, rayon de convergence

a Lemme d'Abel

Propriété : Lemme d'Abel

Soit $r \in \mathbb{R}^+$. Si la suite $(a_n r^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée, alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

Démonstration

Avec $r \neq 0$, $|a_n z^n| = |a_n r|^n \left|\frac{z}{r}\right|^n = \left(\frac{|z|}{r}\right)^n$ terme général de série convergente. □

b Rayon de convergence

Propriété

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *une série entière. Il existe* $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ *unique tel que*

- *Si* $|z| < R$, *la série* $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *est absolument convergente.* (ce cas ne se produit pas si $R = 0$.)
- *Si* $|z| > R$, *la série* $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ *est (très) grossièrement divergente : la suite* $(a_n z^n)_{n\geqslant 0}$ *n'est pas bornée, et donc a fortiori ne converge pas vers* 0. (ce cas ne se produit pas si $R = +\infty$.)

Définition : Rayon et disque ouvert de convergence

R est appelé le **rayon de convergence** de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

$D(0,R) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < R\}$ est le **disque ouvert de convergence** de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

Si $R = +\infty$, ce disque ouvert est $\mathbb{C}$. Si $R = 0$, c'est $\varnothing$. Sinon, c'est un « vrai » disque.

Démonstration : de la propriété

Analyse Soit R convenant.

Si $R < +\infty$, $X = \{r \in \mathbb{R}^+ \ ;\ (a_n r^n)_{n\geqslant 0} \text{ bornée}\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ contenant 0, telle que $[0,R[\subset X \subset [0,R]$, donc $R = \sup X$.

D'où l'unicité sous réserve d'existence.

Synthèse Posons $R = \sup X$ lorsqu'il existe, $+\infty$ sinon.

Dans le deuxième cas, X n'est pas majorée donc pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $r \in X$ tel que $|z| < r$ et, d'après le lemme d'Abel, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est absolument convergente. Donc $R = +\infty$ convient.

Dans le premier cas, si $|z| < R = \sup X$, il existe $r \in X$ tel que $|z| < r$ donc d'après le lemme d'Abel, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

Et si $|z| > R$, $|z| \notin X$ donc la suite $(a_n z^n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas bornée.

De nouveau, R convient.

D'où l'existence. □

Remarques

R 1 – Définitions équivalentes :

$$R = \sup\left(\left\{r \in \mathbb{R}^+,\ (a_n r^n)_{n\geqslant 0} \text{ bornée}\right\}\right)$$

éventuellement $+\infty$, ou encore

$$R = \sup\left(\left\{r \in \mathbb{R}^+,\ \sum_{n\geqslant 0} a_n r^n \text{ absolument convergente}\right\}\right)$$

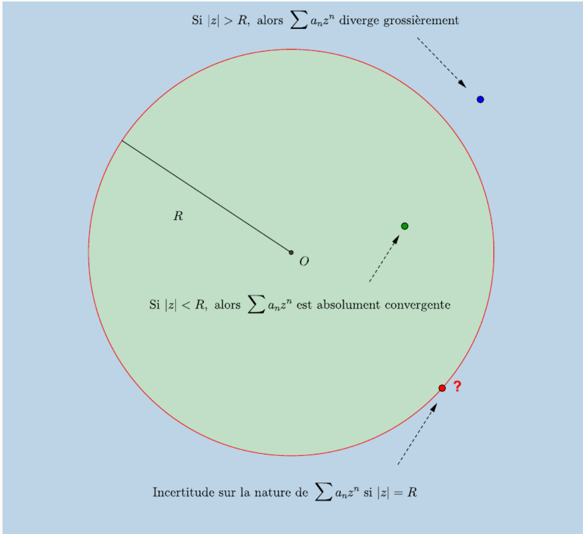
éventuellement $+\infty$.

R2 – D'après la définition du rayon de convergence R,

- Si $|z| < R$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est absolument convergente, mais aussi $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge, et $(a_n z^n)$ est bornée, et $a_n z^n \to 0$.
- Si $|z| > R$, la suite $(a_n z^n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas bornée, mais aussi $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge grossièrement, $a_n z^n \not\to 0$.
- Si $|z| = R$: cas douteux, tout peut arriver.

Si $R = +\infty$, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

Si $R = 0$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge si et seulement si $z = 0$.



R3 – Ne pas confondre $D_R = D(0,R)$ avec l'ensemble de définition de $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

On a en général $D_R \subset D_f \subset \overline{D_R}$.
Si $R = 0$, $D_f = \{0\}$ et si $R = +\infty$, $D_f = \mathbb{C}$.

R4 – Les séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} |a_n| z^n$ ont même rayon de convergence.

R5 – Pour tout $p \in \mathbb{N}$, les séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{n+p}$ et $\sum_{n\geqslant p} a_n z^{n-p}$ ont même rayon de convergence que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

Exemple

La série géométrique $\sum z^n$ a un rayon de convergence de 1.

C Méthodes de détermination pratique du rayon de convergence

Méthode : Utilisation du critère de d'Alembert

Typiquement utilisé pour la plupart des déterminations de rayons de convergence dans les énoncés d'écrit.
Il faut être bien attentif, lors de la rédaction, à n'appliquer le critère de d'Alembert qu'à des séries à termes réels strictement positifs.

Propriété : Rappel

*Soit (u_n) suite **à termes réels strictement positifs** tel que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \in [0, +\infty].$$

- *Si $\ell > 1$, $\sum u_n$ diverge (très) grossièrement (et même $u_n \to +\infty$).*
- *Si $\ell < 1$, $\sum u_n$ converge.*
- *Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire en général (cas douteux).*

Exemples

E1 – Rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$.

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, $\dfrac{|z|^{n+1}/(n+1)!}{|z|^n/n!} = \dfrac{|z|}{n+1} \to 0$, donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{z^n}{n!}$ convergence absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$, donc $R = +\infty$.

E2 – Rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^2 z^n$.

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, $\dfrac{(n+1)^2|z|^{n+1}}{n^2|z|^n} \to |z|$, donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^2 z^n$ convergence absolument si $|z| < 1$ et diverge grossièrement si $|z| > 1$, donc $R = 1$.

E3 – Rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n!}{n^n} z^n$.

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, $\dfrac{|z|^{n+1}(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}|z|^n n!} = \dfrac{|z|}{(1+1/n)^n} \to \mathrm{e}^{-1}|z|$, donc $R = \mathrm{e}$.

E4 – Rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n^2}{2^n} z^n$.

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, $\dfrac{(n+1)^2|z|^{n+1}2^n}{n^2|z|^n 2^{n+1}} \to \dfrac{|z|}{2}$, donc $R = 2$.

E5 – Rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} n! z^n$.

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, $\dfrac{(n+1)!|z|^{n+1}}{n!|z|^n} \to +\infty$, donc $R = 0$.
Bon, pour cet exemple, pas besoin de d'Alembert, on a directement que si $z \neq 0$, $n! z^n \not\to 0$...

E6 – Rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ avec $a_n = \dfrac{n^4+n^3+1}{2\sqrt{n}+3}$.

Dans cet exemple, mieux vaut passer par un équivalent : pour $z \in \mathbb{C}^*$, $\dfrac{|a_{n+1}||z|^{n+1}}{|a_n||z|^n} \sim |z|$, donc $R = 1$.

E7 – Rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n^2}{2^n} z^{2n}$ (série entière lacuniare).

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, $\dfrac{(n+1)^2|z|^{2n+2}2^n}{n^2|z|^{2n}2^{n+1}} \to \dfrac{|z|^2}{2}$, donc $R = \sqrt{2}$.

Remarque

La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n^2}{2^n} z^{2n}$ est vue comme la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = \dfrac{n^2}{2^n}$ et $a_{2n+1} = 0$.

Exercice : CCINP 20 (a)

Rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$.

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, $\dfrac{(n+1)!^2|z|^{2n+3}(2n)!}{(2n+2)!n!^2|z|^{2n+1}} \to \dfrac{|z|^2}{4}$, donc $R = 2$.

Méthode : Une remarque qui résout tout

Si on a la chance de trouver
- un z tel que $\sum a_n z^n$ converge, mais non absolument,
- un z tel que la suite $(a_n z^n)$ soit bornée mais la série $\sum a_n z^n$ diverge,

on est sûr que $R = |z|$.

Exemple : Rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{z^n}{n}$

Pour $z = -1$, la série est semi-convergente. Donc $R = 1$.
On aurait aussi pu appliquer le critère de d'Alembert.

Exercice : CCINP 20 (c)

Rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} \cos(n)z^n$.

La suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée mais ne tend pas vers 0 (sinon, on a un problème avec $\cos(2n) = 2\cos^2 n - 1...$) donc la série $\sum \cos(n)1^n$ ne converge pas absolument, donc $R = 1$.

Remarque : Cette fois, le critère de D'Alembert ne s'applique pas.

Exercice : CCINP 21

1. **Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.**
2. **Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.**
3. **Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?**

1.
2. Puisque $\sum a_n 1^n$ diverge, $R \leqslant 1$.
   Puisque $(a_n 1^n)$ est bornée, $R \leqslant 1$.
   Donc $R = 1$.
3. $(\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est une suite équivalente à $(\sqrt{n})^{(-1)^n - 1}$ donc bornée en séparant n pair ou impair et $\sum (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ diverge grossièrement donc $R = 1$.

Méthode : Suites bornées, convergence vers zéro

Les exercices les plus délicats de détermination de rayons de convergence se font en utilisant plutôt les suites bornées et les deux considérations suivantes (penser au dessin avec le disque de convergence) :

- Si la suite $(a_n z^n)$ est bornée, alors $|z| \leqslant R$
- Si la suite $(a_n z^n)$ est non bornée, alors $|z| \geqslant R$.

Mais aussi

- Si la suite $(a_n z^n)$ converge vers 0, alors $|z| \leqslant R$.
- Si la suite $(a_n z^n)$ ne converge pas vers 0, alors $|z| \geqslant R$.

Exercice : Rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ où a_n est le n-ième chiffre du développement décimal de $\sqrt{3}$

Comme (a_n) est bornée $R \geqslant 1$.
Mais $a_n \not\to 0$ (car $\sqrt{3} \notin \mathbb{D}$), donc $R \leqslant 1$.
Finalement, $R = 1$.

Exercice : Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. Déterminer en fonction de R le rayon de convergence R' de $\sum a_n^2 z^n$.

Si $|z| < R'$, $|a_n|^2 |z|^n \to 0$ donc $|a_n| \sqrt{|z|}^n \to 0$ donc $\sqrt{|z|} \leqslant R$ et $|z| \leqslant R^2$ donc $R' \leqslant R^2$.
Puis si $|z| < R$, $a_n z^n \to 0$ donc $a_n^2 z^{2n} \to 0$ donc $|z|^2 < R'$ donc $R' \geqslant R^2$.
Finalement, $R' = R^2$.

Remarque

Il est bon de retenir qu'il n'est jamais nécessaire d'utiliser la convergence des séries pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière. En revanche, il peut s'avérer indispensable d'utiliser les suites bornées.

d Comparaison de rayons de convergence

Propriété

On note R_a et R_b les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.
Alors,

- *si $|a_n| \leqslant |b_n|$, ou $a_n = b_n$ ou plus généralement $a_n = b_n$,*
$$R_a \geqslant R_b.$$
- *et si $a_n \sim b_n$,*
$$R_a = R_b.$$

Démonstration

- si $|z| \leqslant R_b$, $\sum b_n z^n$ converge absolument, donc $\sum a_n z^n$ converge absolument, donc $|z| \leqslant R_a$. Donc $R_a \geqslant R_b$.
- Deux applications symétriques du premier point.

□

Propriété

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels ou complexes. Les séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Démonstration

Soient R, R' les rayons de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} n a_n z^n$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant |n a_n|$ donc $R \geqslant R'$.

Puis, si $|z| < R$, on va se débarrasser du n en comparant à une suite géométrique : si $|z| < r < R$, $|n a_n z^n| = n\left(\frac{|z|}{r}\right)^n \cdot |a_n r^n| = a_n r^n$ par croissances comparées. Mais $\sum a_n r^n$ est absolument convergente, donc $\sum n a_n z^n$ l'est aussi et $|z| \leqslant R'$. Ainsi, $R \leqslant R'$. □

Corollaire

Si $k \in \mathbb{N}$, les séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} n^k a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^k} z^n$ ont même rayon de convergence que $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

Exercice : CCINP 20 (b)

Déterminer le rayon de convergence la série entière $\sum n^{(-1)^n} z^n$.

Notons R le rayon de convergence de $\sum n^{(-1)^n} z^n$ et posons : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n = n^{(-1)^n}$.

On a, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $|a_n z^n| \leqslant |n z^n|$ et le rayon de convergence de la série entière $\sum n z^n$ vaut 1. Donc $R \geqslant 1$. $(*)$

De même, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $|\frac{1}{n} z^n| \leqslant |a_n z^n|$ et le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} z^n$ vaut 1. Donc $R \leqslant 1$. $(**)$

D'après $(*)$ et $(**)$, $R = 1$.

Remarque

$\sum z^n$, $\sum \frac{z^n}{n}$ et $\sum \frac{z^n}{n^2}$ ont des rayons de convergence égaux à 1.

La première diverge sur tout le cercle, la seconde convergence en certains points et diverge en d'autres, la troisième converge (absolument) en tout point du cercle.

3 Convergence normale

Propriété

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$, $f_n : z \mapsto a_n z^n$.
Alors $\sum f_n$ convergence normalement, donc uniformément sur tout disque fermé inclus dans $D(0,R)$.

Démonstration

On voit graphiquement qu'un disque fermé inclus $\overline{D}(z_0,r)$ dans $D(0,R)$ est lui même inclus dans un disque fermé $\overline{D}(0,r_0)$ inclus dans $D(0,R)$ par inégalité triangulaire (Si $|z-z_0|\leqslant r$, alors $|z|=|z-z_0+z_0|\leqslant r_0=r+|z_0|<R$).
Donc $\overline{D}(z_0,r)\subset\overline{D}(0,r_0)$ avec $r_0<R$ et $\sum|a_n r_0^n|$ est convergente, d'où la convergence normale sur $\overline{D}(z_0,r)$. □

Exercice : CCINP 15

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. **Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.**
   Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.
2. **Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.**
3. **La série de fonctions $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R\in\mathbb{R}_+^*$?**

1.
2.
3. On pose, $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n=\frac{n^2}{n!}$. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{n^2}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0$.
   On en déduit que série entière $\sum\frac{n^2}{n!}z^n$ a un rayon de convergence égal à $+\infty$.
   Cette série entière converge donc normalement sur tout disque fermé de $\mathbb{C}$.
   En particulier, cette série entière converge normalement et donc uniformément, d'après 2., sur tout disque de centre O et de rayon R.

II Opérations algébriques sur les séries entières

1 Combinaisons linéaires

Propriété : Somme de deux séries entières

Soit $\sum\limits_{n\geqslant0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant0} b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. On note R_{a+b} le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant0}(a_n+b_n)z^n$. Alors

$$R_{a+b}\geqslant\min(R_a,R_b).$$

De plus,

$$\forall z\in D\big(0,\min(R_a,R_b)\big),\qquad \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n+\sum_{n=0}^{+\infty}b_nz^n$$

Enfin, si $R_a\neq R_b$, on a $R_{a+b}=\min(R_a,R_b)$.

Démonstration

Si $|z|\leqslant\min(R_a,R_b)$, on a bien convergence absolue de la série somme vers la somme des sommes des séries. Donc $R_{a+b}\geqslant\min(R_a,R_b)$.
Si $R_a\neq R_b$, par exemple $R_a<R_b$, z tel que $R_a<|z|<R_b$, alors $\sum(a_n+b_n)z^n$ diverge donc $|z|\geqslant R_{a+b}$ puis $R_a\geqslant R_{a+b}\geqslant\min(R_a,R_b)=R_a$. □

Remarque

Lorsque $R_a = R_b$, il est possible que R_{a+b} soit strictement supérieur à $R_a = R_b$.

Exemple

Les séries entières (géométriques) $\sum z^n$ et $\sum -z^n$ ont pour rayon de convergence $R = 1$. Leur somme est la série nulle de rayon de convergence $R_{a+b} = +\infty$.

Propriété : Multiplication par un scalaire

Si λ est un nombre complexe non nul, le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} (\lambda a_n)z^n$ est égal au rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

Démonstration

$(a_n z^n)$ est bornée si et seulement si $(\lambda a_n z^n)$ l'est. □

2 Produits de Cauchy

Propriété

On considère deux séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

La série entière produit de Cauchy de ces deux séries entières est la série entière $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ où, pour tout entier naturel n, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Notons R_c son rayon de convergence. Alors

$$R_c \geqslant \min(R_a, R_b)$$

et

$$\forall z \in D\big(0, \min(R_a, R_b)\big) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

Démonstration

Un produit de Cauchy de deux séries absolument convergente converge vers le produit des sommes. □

Remarque

Même si $R_a \neq R_b$, il se peut que l'on ait $R_c > \min(R_a, R_b)$. Se méfier d'une confusion avec la somme, donc.

Exemple

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par

- $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ et pour tout entier $n > 2$, $a_n = 0$,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 1$.

Les séries entières ont pour rayons de convergence respectifs $R_a = +\infty$ et $R_b = 1$.
Or $c_0 = a_0 b_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = a_0 b_n + a_1 b_1 = 0$, donc $R_c = +\infty$.

Exercice

Soit $D = D(0,1)$. Montrer que pour tout $z \in D$, $\dfrac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)z^n$.

Remarque

Parfois les séries entières ne sont définies qu'à partir d'un certain rang. Par exemple, si on considère des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n z^n$, alors le produit de Cauchy se définit $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n z^n$ en posant $a_0 = b_0 = 0$. Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$ et $c_0 = c_1 = 0$. Sur son intervalle ouvert de convergence, on a alors

$$\sum_{n=2}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

3 Séparation des termes d'ordre pair et impair

Exercice : CCINP 47 2.

Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière $\sum a_n x^n$ avec $\begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$ sur l'intervalle ouvert de convergence.

Notons R le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.

On considère les séries $\sum a_{2n} x^{2n} = \sum 4^n x^{2n}$ et $\sum a_{2n+1} x^{2n+1} = \sum 5^{n+1} x^{2n+1}$.

Notons R_1 le rayon de convergence de $\sum 4^n x^{2n}$ et R_2 le rayon de convergence de $\sum 5^{n+1} x^{2n+1}$.

Le rayon de convergence de $\sum x^n$ vaut 1.

Or, $\sum 4^n x^{2n} = \sum (4x^2)^n$.

Donc pour $|4x^2| < 1$ c'est-à-dire $|x| < \frac{1}{2}$, $\sum 4^n x^{2n}$ converge absolument et pour $|4x^2| > 1$ c'est-à-dire $|x| > \frac{1}{2}$, $\sum 4^n x^{2n}$ diverge.

On en déduit que $R_1 = \frac{1}{2}$.

Par un raisonnement similaire et comme $\sum 5^{n+1} x^{2n+1} = 5x \sum (5x^2)^n$, on trouve $R_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Attention, ici il y a un problème dans le corrigé officiel.

Si les séries $\sum a_{2n} x^{2n}$ et $\sum a_{2n+1} x^{2n+1}$ convergent absolument toutes les deux, alors c'est le cas de $\sum a_n x^n$: c'est un résultat de sommabilité (théorème de sommation par paquet). On en déduit que $\frac{1}{\sqrt{5}} \leqslant R$. Autre argument possible sans la sommabilité ? si $a_{2n} x^{2n} \to 0$ et $a_{2n+1} x^{2n+1} \to 0$ alors $a_n x^n \to 0$.

Puis si $|x| > \frac{1}{\sqrt{5}}$, alors $(a_{2n+1} x^{2n+1})$ n'est pas bornée donc $(a_n x^n)$ ne l'est pas non plus, donc $|x| \geqslant R$ et ainsi $\frac{1}{\sqrt{5}} \geqslant R$.

Finalement, $R = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

D'après ce qui précède, on en déduit également que (sommation par paquet ou passage par les sommes partielles)

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right[, S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (4x^2)^n + 5x \sum_{n=0}^{+\infty} (5x^2)^n = \frac{1}{1-4x^2} + \frac{5x}{1-5x^2}.$$

Exercice

Soit R, R', R'' le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, $\sum a_{2n} z^{2n}$ et $\sum a_{2n+1} z^{2n+1}$.
Montrer que $R = \min(R', R'')$.

Si les séries $\sum a_{2n} z^{2n}$ et $\sum a_{2n+1} z^{2n+1}$ convergent absolument toutes les deux, alors c'est le cas de $\sum a_n z^n$: c'est un résultat de sommabilité (théorème de sommation par paquet). On en déduit que $\min(R', R'') \leqslant R$. Autre argument possible sans la sommabilité ? si $a_{2n} z^{2n} \to 0$ et $a_{2n+1} z^{2n+1} \to 0$ alors $a_n z^n \to 0$.

Puis en remarquant qu'en posant b_n tel que $b_n = a_n$ si n pair et 0 sinon, on a $|b_n| \leqslant |a_n|$, on obtient $R' \geqslant R$ et de même on montre que $R'' \geqslant R$. Donc, $R \leqslant \min(R', R'')$.

Autre argument possible, si $|z| > R'$, il y a divergence grossière de $\sum a_{2n} z^{2n}$, donc $a_{2n} z^{2n} \not\to 0$ (ou non bornée) donc $a_n z^n \not\to 0$ (ou non bornée) donc $|z| \geqslant R$ et $R' \geqslant R$. De même, $R'' \geqslant R$.

Finalement, $R = \min(R', R'')$.

III Série entière d'une variable réelle

Dorénavant, on considère des séries entière de la variable réelle : on étudie la série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : x \mapsto a_n x^n$.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être une suite de nombres réels ou complexes, mais x reste réel.

Le disque ouvert de convergence devient intervalle ouvert de convergence $]-R,R[$ et on a $\boxed{]-R,R[\subset D_f \subset [-R,R]}$, où R est le rayon de convergence.

On ne peut rien dire en général en $\pm R$.

1 Classe de la somme d'une série entière

Propriété

Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$, et $f_n : x \mapsto a_n x^n$.
Si $R>0$, $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément sur tout segment inclus dans $]-R,R[$.

Corollaire

La somme d'une série entière de rayon de convergence R est continue sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R,R[$.

Démonstration

On obtient ici la continuité de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-R,R[$ car les f_n sont continues et la convergence est uniforme car normale au voisinage de chaque point de $]-R,R[$.

On étendera prochainement cette propriété aux séries entières d'une variables complexe. □

Remarque

Il peut y avoir des discontinuités « au bord. »
Il peut y avoir une convergence seulement uniforme voire pas de convergence du tout « au bord. »

Exercice : Jadis au programme...

Si le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est R, si $R\in]0,+\infty[$, et si $\sum |a_n| R^n$ converge, alors $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $[-R,R]$.

Il y a convergence normale sur $[-R,R]$.

Exercice : CCINP 18

On pose : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in\mathbb{R}, u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

1. **Étudier la convergence simple de cette série.**
   On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x\in D$.
2. **(a) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.**
   (b) La fonction S est-elle continue sur D ?

1. La série de fonctions étudiée est une série entière de rayon de convergence $R=1$.
   En $x=1$, il y a convergence par le critère spécial des séries alternées.
   En $x=-1$, la série diverge (série harmonique).
   On a donc $D=]-1,1]$.
2. (a) $\forall x\in D$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.

   $\|u_n\|_\infty = \sup_{x\in]-1,1]} |u_n(x)| = \dfrac{1}{n}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge.

Donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ ne converge pas normalement sur D.

$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ ne converge pas uniformément sur D non plus car, sinon, on pourrait employer le théorème de la double limite en -1 et cela entraînerait la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$, ce qui est absurde.

(b) En tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1, S est continue sur $]-1,1[$. $(*)$

Pour étudier la continuité en 1, on peut se placer sur $[0,1]$.
$\forall x \in [0,1]$, la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)$ satisfait le critère spécial des séries alternées ce qui permet de majorer son reste.
On a, $\forall x \in [0,1]$, $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant |u_{n+1}(x)| = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$. (majoration indépendante de x)
Et, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.
Donc, $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.
Les fonctions u_n étant continues sur $[0,1]$, la somme S est alors continue sur $[0,1]$.
Donc, en particulier, S est continue en 1. $(**)$

Donc, d'après $(*)$ et $(**)$, S est continue sur D.

Propriété

On suppose que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ a un rayon de convergence $R>0$. Alors $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$, et se dérive terme à terme sur cet intervalle : pour tout $k\geqslant 1$, pour tout $x \in]-R,R[$, on peut écrire

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(p+k)!}{p!} a_{p+k} x^p$$

(toutes ces séries ayant le même rayon de convergence R).

On a alors $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

Démonstration

On applique le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions : les f_n sont de classe $\mathscr{C}^\infty$, la série de fonction converge simplement et pour tout k, la série des $f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de $]-R,R[$. □

Exercice : CCINP 23

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.

1. **Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1) a_{n+1} x^n$ ont le même rayon de convergence. On le note R.**
2. **Démontrer que la fonction $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]-R,R[$.**

---

1. Pour $x \neq 0$, posons $u_n(x) = a_n x^n$ et $v_n(x) = (n+1)a_{n+1}x^n$.
On pose $\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.
On a, alors, $\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \ell|x|$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{|v_{n+1}(x)|}{|v_n(x)|} = \ell|x|$.

On en déduit que le rayon de convergence des deux séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ vaut $R = 1/\ell$ (avec $R=+\infty$ dans le cas $\ell = 0$ et $R = 0$ dans le cas $\ell = +\infty$).
2. Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.
On pose, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-R,R[$, $f_n(x) = a_n x^n$.

Soit $r \in [0, R[$. On pose $D_r = [-r, r]$.
i) $\sum f_n$ converge simplement sur D_r.
ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D_r .
iii) D'après 1., $\sum f_n'$ est une série entière de rayon de convergence R.
Donc, d'après le cours, $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur tout compact inclus dans $]-R, R[$, donc converge uniformément sur D_r.
On en déduit que $\forall r \in [0, R[$, $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D_r.

Donc, S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-R, R[$.

2 Primitivation de la somme d'une série entière

Propriété

On suppose que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$. Alors les primitives de $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-R, R[$ sont données par

$$F : x \mapsto F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

(Cette série entière ayant encore pour rayon de convergence R).

Démonstration

Conséquence immédiate de la propriété précédente. □

3 Quelques calculs

Exemples

E 1 – Partons d'une série entière simple et plutôt célèbre :

$$\forall x \in]-1, 1[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

On peut dériver ou primitiver autant qu'on veut. Par exemple :

$$\forall x \in]-1, 1[, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \qquad\qquad \forall x \in]-1, 1[, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Et ainsi de suite...

E 2 – On prend vite l'habitude de « bricoler » si on n'a pas exactement la forme voulue pour les séries entières que l'on veut calculer :

$$\forall x \in]-1, 1[, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = \qquad\qquad \forall x \in]-1, 1[, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} =$$

(Cette dernière ne s'exprime pas à l'aide des fonctions usuelles.)

E 3 – Il n'y a pas que la primitivation et la dérivation : les opérations algébriques (combinaison linéaire, produit) sont aussi bien utiles. Par exemple, définissons, si $n \geqslant 1$, $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$. Alors le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 1} H_n x^n$ est $R = 1$ et on calcule

$$\forall x \in]-R, R[, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

Remarquons que, pour tout n, $H_n \geqslant 1$. Donc $R \leqslant 1$ (la série $\sum H_n 1^n$ diverge grossièrement, donc 1 n'est pas dans le disque ouvert de convergence). Mais aussi, pour tout $n \geqslant 1$,

$$H_n \leqslant n \times 1 = n$$

(majoration d'une somme par le nombre de termes multiplié par le plus grand d'entre eux). Donc $R \geqslant 1$ (en effet, si $|x| < 1$, $H_n x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées, donc $|x| \leqslant R$).

Notons que l'équivalent célèbre $H_n \sim \ln n$ n'est pas nécessaire ici : très souvent, la détermination d'un rayon de convergence est assez grossière.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 1$ et, si $n \geqslant 1$, $b_n = \dfrac{1}{n}$. On définit aussi $b_0 = 0$. On a construit ces deux suites pour avoir, en posant $h_0 = 0$: $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad H_n = \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}$.

On peut alors appliquer le théorème sur le produit de Cauchy :

$$\forall x \in]-1,1[\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)$$

d'où

$$\forall x \in]-1,1[\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$$

IV Fonctions développables en série entière

1 Définition

Définition

Soit $r > 0$, f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie au moins sur $]-r,r[$; on dit que f est développable en série entière sur $]-r,r[$ lorsqu'il existe une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence au moins égal à r telle que

$$\forall x \in]-r,r[\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Remarque

On dit aussi que f est développable en série entière au voisinage de 0 lorsqu'il existe $r > 0$ tel que f soit développable en série entière sur $]-r,r[$.

2 Stabilité

Propriété

Toute combinaison linéaire, tout produit, la dérivée, toute primitive d'une fonctions développables en série entière sur $]-r,r[$ le sont.

3 Condition nécessaire, série de Taylor

Remarque

Pour que f soit développable en série entière sur $]-r,r[$, il est nécessaire qu'elle soit de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur cet intervalle.

Définition : Série de Taylor

Soit f une fonction d'une variable réelle, à valeurs réelles ou complexes, de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0 (i.e. de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur au moins un certain intervalle $]-\delta,\delta[$ avec $\delta > 0$). On appelle **série de Taylor de f** la série entière

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Propriété : condition nécessaire et unicité

Si f est développable en série entière sur $]-r,r[$ ($r>0$), elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r,r[$ et somme de sa série de Taylor sur cet intervalle (cette série de Taylor a donc un rayon de convergence au moins égal à r).

Il y a donc unicité du développement en série entière s'il existe.

Remarque

Simple mais important ! « par unicité du développement en série entière » sera un argument fréquemment utilisé.

Propriété : Unicité du DSE

Si $\forall x \in]-r,r[\qquad f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ (on suppose $r>0$, et on suppose que les rayons de convergence de chacune des séries sont $\geqslant r$), alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = b_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Remarque

Comme pour les développements limités, l'unicité permet de voir que si une fonction est paire (respectivement impaire), alors tous les termes d'indices impairs (respectivement pairs) sont nuls.

Exemple : (montrant que la condition n'est pas suffisante)

Montrer que $x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ prolongée par continuité en 0 est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, que sa série de Taylor a un rayon de convergence infini et que pourtant la fonction n'est pas développable en série entière.

Notons en effet f cette fonction. On a vu que f était de classe C^∞, et que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(k)}(0)=0$$

Si f est développable en série entière sur $]-r,r[$ $(r>0)$, alors elle est somme de sa série de Taylor sur cet intervalle, c'est-à-dire

$$\forall x \in]-r,r[\qquad f(x)=0$$

ce qui est manifestement faux. Donc f n'est pas développable en série entière autour de 0.

4 Critère de développabilité en série entière

Propriété

Soit f une fonction de classe C^∞ sur $]-r,r[$ ($r>0$), à valeurs réelles ou complexes.

On note, pour tout $x \in]-r,r[$, $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

Alors f est développable en série entière sur $]-r,r[$ si et seulement si, pour tout x dans $]-r,r[$, la suite $\left(R_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Démonstration

En effet

$$\begin{aligned} f \text{ est développable en série entière sur }]-r,r[&\iff \forall x \in]-r,r[,\ \ f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \\ &\iff \forall x \in]-r,r[,\ \ \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) \\ &\iff \forall x \in]-r,r[,\ \ R_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{aligned}$$

□

Remarque

On rappelle que

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

et surtout que

$$\left|R_n(x)\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[0,x]} \left|f^{(n+1)}\right|$$

V Développements en séries entières des fonctions usuelles

1 Fonctions d'une variable complexe

a Exponentielle complexe

Propriété

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad (R = +\infty)$$

Remarque

C'est aussi une définition alternative de $\exp(z)$.

Démonstration

Déjà vu : on appliquer Taylor-Lagrange à $f : t \in [0,1] \mapsto \mathrm{e}^{tz}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = z^n$.
$\left|f^{(n+1)}(t)\right| = \left|z^{n+1}\mathrm{e}^{tz}\right| = |z|^{n+1}\mathrm{e}^{t\mathfrak{Re}(z)} \leqslant |z|^{n+1}\mathrm{e}^{t\mathfrak{Re}(z)} \leqslant |z|^{n+1}\max\left(1, \mathrm{e}^{\mathfrak{Re}(z)}\right) = M(z)$ donc

$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-0)^k}{k!} f^{(k)}(0) \right| = \left| \mathrm{e}^z - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^n}{k!} \right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} M(z) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \quad \square$$

Corollaire

Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$,

$$\exp(z+z') = \exp(z)\ \exp(z').$$

Démonstration

Produit de Cauchy. □

b Série géométrique

Propriété

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, $\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \qquad (R = 1).$

2 Exponentielle réelle

Propriété

La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ (c'est-à-dire l'unique solution de l'équation différentielle $y' = y$ qui prend en 0 la valeur 1) est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}. \qquad (R = +\infty)$$

Démonstration

C'est le cas réel du paragraphe précédent.

On peut aussi le remontrer directement : on a, pour tout k, $\exp^{(k)} = \exp$. Donc la majoration de Taylor-Lagrange donne, pour tout x réel, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{M}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

où $M = \sup\limits_{[0,x]}(\exp)$ $(= 1$ si $x \leqslant 0$, $= e^x$ si $x \geqslant 0)$. Or par croissances comparées,

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

et donc

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^x$$

□

Exercice

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{e^{x^2} - 1}{x^2}$.

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3 Fonctions trigonométriques et hyperboliques

Propriété

Les fonctions $\sin$, $\cos$, ch, sh *sont développables en série entière sur* $\mathbb{R}$ *(*$R = +\infty$*), et*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{sh}\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Remarque

Cela permet de démontrer que $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$. L'aviez-vous un jour démontré ?

Démonstration

Soit Taylor-Lagrange, soit $\cos x = \mathfrak{Re}\left(e^{ix}\right)$ et $\sin x = \mathfrak{Im}\left(e^{ix}\right)$.

Pour sh et ch : on peut aussi les voir comme parties paire et impaire de l'exponentielle. Ou alors on revient à la définition et on utilise le développement de l'exponentielle. □

4 Fonctions $x \mapsto (1+x)^\alpha$

Propriété

Pour tout α *réel, la fonction* $x \mapsto (1+x)^\alpha$ *est développable en série entière sur* $]-1,1[$ $(R = 1)$.

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Si $\alpha \in \mathbb{N}$*, le développement est valable dans* $\mathbb{R}$ *(*$R = +\infty$*).*

Remarque

On note parfois $\dbinom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$. Cette notation ne vaut rien si on ne sait pas ce qu'elle signifie.

On a alors $\forall x \in]-1,1[, \qquad (1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$

Démonstration

On pourrait utiliser Taylor-Lagrange de nouveau, mais on va plutôt utiliser une méthode importante : la recherche de solutions développables en séries entières d'une équation différentielle.

Notons $f_\alpha : x \mapsto (1+x)^\alpha$ et remarquons que f_α est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$ et solution sur cet intervalle de l'équation

$$(1+x)y' - \alpha y = 0. \qquad (E)$$

On cherche d'éventuelles solutions développables en série entière de (E).

Analyse Soit ϕ tel que pour tout $x \in]-r,r[$ (avec $r>0$), $\phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels.

(On suppose implicitement que le rayon de convergence de la série entière est supérieur ou égal à r).

Par théorème, ϕ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r,r[$ et se dérive terme à terme. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\phi \text{ est solution de } (E) \text{ sur }]-r,r[&\iff \forall x \in]-r,r[, \quad (1+x)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\
&\iff \forall x \in]-r,r[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\
&\iff \forall x \in]-r,r[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\
&\iff \forall x \in]-r,r[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+1)a_{n+1} + (n-\alpha)a_n]\, x^n = 0 \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1} a_n \qquad (1)
\end{aligned}$$

(par unicité du développement en série entière.)

Synthèse Comme on a raisonné par équivalences, la seule chose à vérifier est que le rayon de convergence de la série entière est bien >0 pour valider le raisonnement.

Soit donc une suite vérifiant la relation de récurrence (1). S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n = 0$, alors (a_n) est constamment nulle est le rayon est $+\infty$.

Sinon, tous les a_n sont non nuls et on peut procéder par la règle de d'Alembert : $\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} \to |x|$ donc le rayon est 1.

Comme $f_\alpha(0) = 1$, par unicité de solution au problème de Cauchy constitué de l'équation (E) et de la condition initiale $f(0) = 1$, on a pour tout $x \in]-1,1[$, $f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1} a_n$.

On calcule alors $a_1 = \alpha$, $a_2 = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$ et par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!}$ (valable aussi pour $n=0$ car alors le produit vide vaut 1).

□

Remarque

Dans le cas où $\alpha \in \mathbb{N}$, on retrouve la formule du binôme de Newton.

Propriété

En particulier, pour tout $x \in]-1,1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ *et* $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$. $(R=1)$

5 $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \ln(1-x)$

Propriété

$x \mapsto \ln(1-x)$ *et* $x \mapsto \ln(1+x)$ *sont développables en série entière sur* $]-1,1[$ $(R=1)$ *et*

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-x^n}{n}$$

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

Démonstration

Primitivation de séries entières géométriques. □

Exercice : En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

En effet, le TSSA nous assure la convergence uniforme sur $[-1,0]$ et donc la continuité en -1 dans le DSE de $\ln(1-x)$.

6 Arctan, Arcsin

Propriété

Arctan est développable en série entière sur $]-1,1[$ ($R=1$) et

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Démonstration

Par primitivation. □

Exercice : Développer en série entière la fonction Arcsin.

Pour Arcsin, c'est moins simple et cela n'apparaît pas dans le programme. Donc pas à connaître par cœur.
On peut utiliser le fait que sur $]-1,1[$, $\operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. On trouve

$$\operatorname{Arcsin}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1\cdot 3 \cdots (2n-1)}{2\cdot 4 \cdots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Et pour Arccos ? C'est $\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}$!

Exercice : CCINP 51

1. **Montrer que la série $\sum \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ converge.**

   On se propose de calculer la somme de cette série.

2. **Donner le développement en série entière en 0 de $t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.**

   Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.
3. **En déduire le développement en série entière en 0 de $x \longrightarrow \operatorname{Arcsin} x$ ainsi que son rayon de convergence.**
4. **En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.**

---

1. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.
   On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
   $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n+1)}{(n+1)^2 2^4 (2n+3)} = \frac{(2n+1)^2}{8(n+1)(2n+3)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4}$.
   Ainsi, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4} < 1$.
   Donc, d'après la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.
2. D'après le cours, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $u \mapsto (1+u)^\alpha$ est développable en série entière en 0 et le rayon de convergence R de son développement en série entière vaut 1 si $\alpha \notin \mathbb{N}$.
   De plus, $\forall u \in]-1,1[$, $(1+u)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} u^n$.
   En particulier, pour $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $u = -t$:

$R=1$ et $\forall t\in]-1,1[,\ \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)(-3)\cdots\big(-(2n-1)\big)}{2^n n!}(-t)^n$.

En multipliant numérateur et dénominateur par $2.4.\ldots.2n=2^n n!$, on obtient :

$\forall t\in]-1,1[,\ \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}t^n$

Conclusion : $R=1$ et $\forall t\in]-1,1[,\ \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}t^n$.

3. D'après la question précédente, en remarquant que : $x\in]-1,1[\Leftrightarrow t=x^2\in[0,1[$ et $[0,1[\subset]-1,1[$, il vient :

   $\forall x\in]-1,1[,\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}x^{2n}$ avec un rayon de convergence $R=1$.

   Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ avec $\text{Arcsin}':x\longmapsto\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

   D'après le cours sur les séries entières, on peut intégrer terme à terme le développement en série entière de $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et le rayon de convergence est conservé.

   De plus, on obtient :

   $\forall x\in]-1,1[,\ \text{Arcsin}\,x=\underbrace{\text{Arcsin}\,0}_{=0}+\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2(2n+1)}x^{2n+1}$ avec un rayon de convergence $R=1$.

4. Prenons $x=\dfrac{1}{2}\in]-1,1[$ dans le développement précédent.

   On en déduit que $\text{Arcsin}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}\dfrac{1}{2^{2n+1}}$.

   C'est-à-dire, en remarquant que $\text{Arcsin}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{6}$, on obtient $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}=\dfrac{\pi}{3}$.

VI Quelques méthodes

1 Développements en séries entières

Méthode

1. Utilisation des DSE de fonctions usuelles : opérations usuelles, intégration, dérivation, produit de Cauchy.
2. Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.
3. Utilisation d'une équation différentielle (voir preuve pour $(1+x)^\alpha$) :
   (a) Supposer (analyse) avoir une fonction DSE avec un rayon $R>0$.
   (b) Traduire le fait qu'elle soit solution de l'équation différentielle.
   (c) En déduire ses cœfficients par unicité de ceux-ci (en général, on a une relation de récurrence).
   (d) Vérifier qu'effectivement, le rayon est >0 (synthèse).
   (e) Exprimer éventuellement la solution avec les fonctions usuelles.

Exercice : CCINP 2

On pose $f(x)=\dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.

1. **Décomposer** $f(x)$ **en éléments simples.**
2. **En déduire que** f **est développable en série entière sur un intervalle du type** $]-r,r[$ **(où** $r>0$**).**
   Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D **de ce développement en série entière.**
3. **(a) Soit** $\sum a_n x^n$ **une série entière de rayon** $R>0$.
   On pose, pour tout $x\in]-R,R[$, $g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$.
   Exprimer, pour tout entier p**, en le prouvant,** a_p **en fonction de** $g^{(p)}(0)$.
   (b) En déduire le développement limité de f **à l'ordre 3 au voisinage de 0.**

---

1. En utilisant les méthodes habituelles de décomposition en éléments simples, on trouve : $f(x)=\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{4}{(x+1)^2}$.

2. D'après le cours, $x \longmapsto \dfrac{1}{x+1}$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{(x+1)^2}$ sont développables en série entière à l'origine.

   De plus, on a $\forall\, x \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$.

   Et, $\forall\, x \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{(1+x)^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} n x^{n-1}$ (obtenu par dérivation du développement précédent).

   On en déduit que f est développable en série entière en tant que somme de deux fonctions développables en série entière.

   Et $\forall\, x \in]-1,1[$, $f(x) = 3\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n + 4\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+1)x^n$.

   C'est-à-dire : $\forall\, x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(4n+7)(-1)^n x^n$.

   Notons D le domaine de validité du développement en série entière de f.

   D'après ce qui précède, $]-1,1[\subset D$.

   Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum(4n+7)(-1)^n x^n$.

   D'après ce qui précède $R \geqslant 1$.

   Posons, pour tout entier naturel n, $a_n = (4n+7)(-1)^n$.

   Pour $x=1$ et $x=-1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n x^n| = +\infty$ donc $\sum(4n+7)(-1)^n x^n$ diverge grossièrement.

   Donc $R \leqslant 1$, $1 \notin D$ et $-1 \notin D$.

   On en déduit que $D =]-1,1[$.

3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$.

   On pose, pour tout $x \in]-R,R[$, $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

   D'après le cours, g est de classe C^∞ sur $]-R,R[$.

   De plus, $\forall\, x \in]-R,R[$,

   $g'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$

   $g''(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$.

   et, par récurrence, on a :

   $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in]-R,R[$, $g^{(p)}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)...(n+p)a_{n+p}x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(n+p)!}{n!}a_{n+p}x^n$.

   Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $g^{(p)}(0) = p!a_p$.

   C'est-à-dire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_p = \dfrac{g^{(p)}(0)}{p!}$.

   (b) f est de classe C^∞ sur $]-1,1[$.

   Donc d'après la formule de Taylor-Young, au voisinage de 0, $f(x) = \sum\limits_{p=0}^{3}\dfrac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p + x^3$. $(*)$

   Or, d'après 3.(a), pour tout entier p, $\dfrac{f^{(p)}(0)}{p!}$ est aussi la valeur du p^{e} coefficient du développement en série entière de f.

   Donc, d'après 2., pour tout entier p, $\dfrac{f^{(p)}(0)}{p!} = (4p+7)(-1)^p$. $(**)$

   Ainsi, d'après $(*)$ et $(**)$, au voisinage de 0, $f(x) = \sum\limits_{p=0}^{3}(4p+7)(-1)^p x^p + o(x^3)$.

   C'est-à-dire, au voisinage de 0, $f(x) = 7 - 11x + 15x^2 - 19x^3 + o(x^3)$.

Exercice : CCINP 22

1. **Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.**
2. **Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$.**

   La série obtenue converge-t-elle pour $x = \frac{1}{4}$? $x = \frac{1}{2}$? $x = -\frac{1}{2}$?

---

1. Voir cours.

2. Pour $|x|<1$, $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$.

   Pour $|x|<\frac{1}{2}$, $\ln(1-2x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n}x^n$.

   D'après 1., le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n$ vaut $\frac{1}{2}$.

   Donc le domaine de validité du développement en série entière à l'origine de f contient $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$ et est contenu dans $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

   Et, pour $|x|<\frac{1}{2}$, $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n$.

   Pour $x=\frac{1}{4}$: la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n$ converge car $\left|\frac{1}{4}\right|<\frac{1}{2}$.

   Pour $x=\frac{1}{2}$: la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n$ diverge car elle est la somme d'une série convergente ($\frac{1}{2}$ appartient au disque de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$) et d'une série divergente (série harmonique).

   Pour $x=-\frac{1}{2}$: la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n$ converge comme somme de deux séries convergentes.

   En effet, d'une part, $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ converge car $-\frac{1}{2}$ appartient au disque de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$.

   D'autre part, $\sum_{n\geqslant 1}-\frac{2^n}{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=-\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées (la suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien positive, décroissante et de limite nulle).

Exercice : CCINP 32

Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y''+3xy'+y=0$.

1. **Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle** $]-r,r[$ **de** $\mathbb{R}$**, avec** $r>0$.
   Déterminer la somme des séries entières obtenues.
2. **Est-ce que toutes les solutions de** $x(x-1)y''+3xy'+y=0$ **sur** $]0,1[$ **sont les restrictions d'une fonction développable en série entière sur** $]-1,1[$ **?**

---

1. Soit $\sum a_nx^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$ et de somme S.
   Pour tout $x\in]-R,R[$, $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$, $S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}$ et $S''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^{n-1}$.
   Donc $x(x-1)S''(x)+3xS'(x)+S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+1)^2a_n-n(n+1)a_{n+1}\right)x^n$.

   Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, la fonction S est solution sur $]-R,R[$ de l'équation étudiée si, et seulement si, $\forall n\in\mathbb{N}$, $(n+1)^2a_n-n(n+1)a_{n+1}=0$.
   C'est-à-dire : $\forall n\in\mathbb{N}$, $na_{n+1}=(n+1)a_n$.
   Ce qui revient à : $\forall n\in\mathbb{N}, a_n=na_1$.
   Le rayon de convergence de la série entière $\sum nx^n$ étant égal à 1, on peut affirmer que les fonctions développables en série entière solutions de l'équation sont les fonctions :
   $x\longmapsto a_1\sum_{n=0}^{+\infty}nx^n=a_1x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{a_1x}{(1-x)^2}$ définies sur $]-1,1[$, avec $a_1\in\mathbb{R}$.

2. Notons (E) l'équation $x(x-1)y''+3xy'+y=0$.
   Prouvons que les solutions de (E) sur $]0;1[$ ne sont pas toutes développables en série entière à l'origine. Raisonnons par l'absurde.
   Si toutes les solutions de (E) sur $]0;1[$ étaient développables en série entière à l'origine alors, d'après 1., l'ensemble des solutions de (E) sur $]0;1[$ serait égal à la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(f)$ où f est la fonction définie par $\forall x\in]0,1[$, $f(x)=\frac{x}{(1-x)^2}$.

Or, d'après le cours, comme les fonctions $x \longmapsto x(x-1)$, $x \longmapsto 3x$ et $x \longmapsto 1$ sont continues sur $]0,1[$ et que la fonction $x \longmapsto x(x-1)$ ne s'annule pas sur $]0,1[$, l'ensemble des solutions de (E) sur $]0,1[$ est un plan vectoriel. D'où l'absurdité.

2 Calcul de somme d'une série entière

Méthode : Utilisation les DSE des fonctions usuelles

1. Si $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul, pour calculer la somme des séries entière $\sum P(n)x^n$ et $\sum \frac{P(n)}{n!}x^n$, on décompose P dans la base $(Q_k)_k$ où $Q_0 = 1$, $Q_1 = X$, et pour tout k, $Q_k = X(X-1)\cdots(X-k+1)$, afin de faire apparaître des séries entières dérivées ou primitivées.
2. Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.
3. Intégration ou dérivation terme à terme.

Exercice : CCINP 47 (a)

Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$ sur l'intervalle ouvert de convergence.

On note R le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$ et pour tout réel x, on pose $u_n(x) = \frac{3^n x^{2n}}{n}$.

Pour x non nul, $\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \left|\frac{3nx^2}{n+1}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |3x^2|$.

Donc, d'après la règle de d'Alembert :

si $|3x^2| < 1$ c'est-à-dire si $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ alors $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$ converge absolument

et si $|3x^2| > 1$ c'est-à-dire si $|x| > \frac{1}{\sqrt{3}}$ alors $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$ diverge.

On en déduit que $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

On pose : $\forall x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$, $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n x^{2n}}{n}$.

On a : $\forall x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$, $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(3x^2)^n}{n}$.

Or, d'après les développements en séries entières usuels, on a : $\forall t \in]-1,1[$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} = -\ln(1-t)$.

Ainsi : $\forall x \in \left]-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right[$, $S(x) = -\ln(1-3x^2)$.

Exercice : CCINP 24

1. **Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$.**

   On pose $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.
2. **Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.**
3. **(a) Déterminer $S(x)$.**

   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 1, \quad f(x) = \mathrm{ch}\sqrt{x} \text{ si } x > 0, \quad f(x) = \cos\sqrt{-x} \text{ si } x < 0 .$$

   Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

1. Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$.

   Pour $x \neq 0$, posons $u_n = \frac{x^n}{(2n)!}$.

$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{|x|}{(2n+2)(2n+1)} = 0.$

On en déduit que la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$ converge pour tout $x\in\mathbb{R}$ et donc $R=+\infty$.

2. $\forall x\in\mathbb{R}$, $\text{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et le rayon de convergence du développement en série entière de la fonction ch est égal à $+\infty$.

3. (a) Pour $x\geqslant 0$, on peut écrire $x=t^2$ et $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}=\text{ch}(t)=\text{ch}\sqrt{x}$.

   Pour $x<0$, on peut écrire $x=-t^2$ et $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}=\cos(t)=\cos\sqrt{-x}$.

   (b) D'après la question précédente, la fonction f n'est autre que la fonction S.
   S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car développable en série entière à l'origine avec un rayon de convergence égal à $+\infty$.
   Cela prouve que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice

Déterminer le rayon de convergence puis calculer la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^2}{2^n}x^n$.

Par d'Alembert, $R=2$ (ou parce que le rayon de convergence de $\sum n^2x^n$ vaut 1).

Puis $n^2=n(n-1)+n$ donc $f(2x)=x^2\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)x^{n-2}+x\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}=\frac{2x^2}{(1-x)^3}+\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{x^2+x}{(1-x)^3}$.

Donc pour tout $x\in]-2,2[$, $f(x)=\frac{2x^2+4x}{(2-x)^3}$.

Exercice

Déterminer le rayon de convergence puis calculer la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 2}\frac{n}{(n-1)(n+2)}x^n$.

Par d'Alembert, $R=1$ (ou parce que le rayon de convergence de $\frac{n}{(n-1)(n+2)}\sim\frac{1}{n}$).

Puis décomposition en éléments simples.

Exercice : Une application des séries génératrices

En utilisant des séries entières, déterminer le terme général de la suite de Fibonnaci donnée par $F_0=0$, $F_1=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$.

Soit la série entière $\sum F_nx^n$. Sous réserve d'un rayon de convergence $R>0$, on a pour $x\in]-R,R[$, $\sum_{n=0}^{+\infty}F_{n+2}x^{n+2}=\sum_{n=0}^{+\infty}F_nx^{n+2}+\sum_{n=0}^{+\infty}F_{n+1}x^{n+2}$ donc $f(x)-x=x^2f(x)+xf(x)$ soit $(x^2+x-1)f(x)=-x$ et $f(x)=\frac{x}{1-x-x^2}$ lorsque $1-x-x^2\neq 0$.

Par DES, $f(x)=\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1}{1-\varphi x}-\frac{1}{1-\psi x}\right)$ avec $\varphi=\frac{1+\sqrt5}{2}$ et $\psi=\frac{1-\sqrt5}{2}$ et on a bien un rayon de convergence >0, puis $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt5}\varphi^n-\frac{1}{\sqrt5}\psi^n\right)x^n$: on retrouve par unicité l'expression des termes de la suite de Fibonacci.