CCINP PC 2021 - Corrigé - Relu

Exercice 1 - Les urnes de Pólya

Partie I - Préliminaires

1. Notons R_i (resp. B_i) l'événement "tirer une boule rouge (resp. blanche) au i-ème tirage."
On a $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$ et
$$P(X_1 = 1) = P(B_1) = \frac{b}{b+r} \quad \text{et} \quad P(X_1 = 0) = P(R_1) = \frac{r}{b+r}$$
car toutes les $b + r$ boules présentes dans l'urne sont équiprobables.

2. • Sachant $X_1 = 1$, on a tiré une boule blanche au premier tirage, donc, avant le second tirage, l'urne contient $b + 1$ boules blanches et r boules rouges équiprobables, donc
$$P_{X_1=1}(X_2 = 1) = P_{X_1=1}(B_2) = \frac{b+1}{r+b+1} \quad \text{et} \quad P_{X_1=1}(X_2 = 0) = P_{X_1=1}(R_2) = \frac{r}{r+b+1}.$$
De même, sachant $X_1 = 0$, on a b boules blanches et $r + 1$ boules rouges équiprobables pour le deuxième tirage, donc
$$P_{X_1=0}(X_2 = 1) = P_{X_1=0}(B_2) = \frac{b}{r+b+1} \quad \text{et} \quad P_{X_1=0}(X_2 = 0) = P_{X_1=0}(R_2) = \frac{r+1}{r+b+1}.$$
• On a $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$ et, d'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X_1 = 0, X_1 = 1)$, on a
$$\begin{aligned} P(X_2 = 0) &= P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) + P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) \\ &= P(X_1 = 0)P_{X_1=0}(X_2 = 0) + P(X_1 = 1)P_{X_1=1}(X_2 = 0) \\ &= \frac{r}{b+r}\frac{r+1}{b+r+1} + \frac{b}{b+r}\frac{r}{b+r+1} = \frac{r(b+r+1)}{(b+r)(b+r+1)} = \frac{r}{b+r} \end{aligned}$$
et $P(X_2 = 1) = 1 - P(X_2 = 0) = \dfrac{b}{b+r}$.

3. • $S_n = b + \sum_{k=1}^{n} X_k$ est égale au nombre de boules présentes dans l'urne au départ auquel on ajoute le nombre de boules blanches tirées au cours des n premiers tirages. Sachant que chaque fois que l'on tire une boule blanche, on en ajoute globalement une dans l'urne, S_n est égale au nombre de boules blanches présentes initialement auquel on ajoute le nombre de boules blanches ajoutées au cours des n premiers tirages. S_n représente donc le nombre de boules blanches présentes dans l'urne avant le $(n + 1)$-ième tirage.
• Comme, à chaque tirage, il y a au moins 1 boule blanche et une boule rouge dans l'urne, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $X_k(\Omega) = \{0, 1\}$.
D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)(\Omega) = [\![0, n]\!]$, donc $S_n(\Omega) = [\![b, b + n]\!]$. Cette formule est encore valable pour $n = 0$ (car $S_0 = b$), donc est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie II - La loi de X_n

4. Soit $k \in [\![b, n + b]\!]$.
Sachant $S_n = k$, l'urne contient au début du $(n + 1)$-ème tirage k boules blanches.
Comme, à chaque tirage, on ajoute exactement une boule (que la boule tirée soit blanche ou rouge), l'urne contient en tout, avant le $(n + 1)$-ème tirage, $r + b + n$ boules, donc $r + b + n - k$ boules rouges.
D'où, comme toutes les boules présentes dans l'urne sont équiprobables,
$$P(X_{n+1} = 1 | S_n = k) = P_{S_n=k}(B_{n+1}) = \frac{k}{r+b+n}.$$

5. Comme S_n est finie, elle admet bien une espérance.
De plus, d'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(S_n = k)_{k \in S_n(\Omega)} = (S_n = k)_{k \in [\![b, b+n]\!]}$, on a :
$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) &= \sum_{k=b}^{b+n} P(X_{n+1} = 1 \cap S_n = k) = \sum_{k=b}^{b+n} P(S_n = k)P_{S_n=k}(X_{n+1} = 1) \\ &= \sum_{k=b}^{b+n} P(S_n = k)\frac{k}{r+b+n} = \frac{1}{r+b+n}\sum_{k=b}^{b+n} kP(S_n = k) = \frac{E(S_n)}{r+b+n}. \end{aligned}$$

6. Montrons par récurrence forte que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, "X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$" (HR_n).

Initialisation : Pour $n=1$, d'après la question 1, on a $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{b}{r+b}\right)$, donc on a bien HR_1.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons HR_k vérifiée pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

Alors on a $E(X_k) = \dfrac{b}{b+r}$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, donc, par linéarité de l'espérance,

$$E(S_n) = b + \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = b + n\frac{b}{b+r} = \frac{b(b+r+n)}{b+r}.$$

D'où, d'après la question précédente,

$$P(X_{n+1}=1) = \frac{E(S_n)}{r+b+n} = \frac{b(b+r+n)}{b+r}\frac{1}{r+b+n} = \frac{b}{b+r},$$

et, comme $X_{n+1}(\Omega) = \{0,1\}$, on a $X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{b}{b+r}\right)$. On a bien HR_{n+1}.

Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{b}{b+r}\right)$.

Partie III - La loi de S_n dans un cas particulier

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a ici $S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} X_k$, donc

$$(S_n = 1) \Leftrightarrow 1 + \sum_{k=1}^{n} X_k = 1 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} X_k = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!],\ X_k = 0$$

car toutes les variables X_k sont positives, et une somme de positifs est nulle si et seulement si chacun des termes de la somme est nul.

8. On a donc

$$\begin{aligned}
P(S_n=1) &= P\left(\bigcap_{k=1}^{n}(X_k=0)\right)\\
&= P(X_1=0)P_{X_1=0}(X_2=0)\times\cdots\times P_{X_1=0\cap\ldots\cap X_{n-1}=0}(X_n=0) \quad \text{(formule des probabilités composées)}\\
&= P(X_1=0)\times\prod_{k=1}^{n-1}P_{X_1=0\cap\ldots\cap X_k=0}(X_{k+1}=0)\\
&= \frac{1}{2}\times\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1+k}{2+k} = \frac{1}{n+1} \quad \text{(télescopage)}
\end{aligned}$$

car, pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$, sachant $X_1 = 0 \cap \ldots \cap X_k = 0$, on a tiré k boules rouges, donc ajouté k boules rouges, et l'urne contient donc $k+1$ rouges et 1 blanche équiprobables au début du $k+1$-ème tirage.

$(S_n = n+1)$ signifie que l'on a tiré que des boules blanches. Dans cette partie, les blanches et les rouges ont des rôles complètement symétriques (même nombre au départ et même comportement à chaque tirage), donc, par symétrie (ou en inversant le rôle des blanches et des rouges), on a bien $P(S_{n+1}=n) = \dfrac{1}{n+1}$.

9. Soit $(k,\ell) \in [\![1,n+2]\!] \times [\![1,n+1]\!]$.

   (i) Si $\ell \notin \{k-1,k\}$, alors, comme $(S_{n+1}-S_n)(\Omega) = X_{n+1}(\Omega) = \{0,1\}$, l'événement $(S_{n+1}=k \cap S_n=\ell)$ est impossible (car il implique $S_{n+1}-S_n = k-\ell \notin \{0,1\}$), donc

$$P(S_{n+1}=k|S_n=\ell) = \frac{P(S_{n+1}=k\cap S_n=\ell)}{P(S_n=\ell)} = \frac{0}{P(S_n=\ell)} = 0.$$

   (ii) Si $\ell = k-1$ (et donc $k \geq 2$), alors

$$\begin{aligned}
P(S_{n+1}=k|S_n=\ell) &= \frac{P(S_{n+1}=k\cap S_n=k-1)}{P(S_n=k-1)} = \frac{P(S_{n+1}-S_n=1\cap S_n=k-1)}{P(S_n=k-1)}\\
&= \frac{P(X_{n+1}=1\cap S_n=k-1)}{P(S_n=k-1)}\\
&= \frac{P(S_n=k-1)P_{S_n=k-1}(X_{n+1}=1)}{P(S_n=k-1)} \quad \text{(formule des probabilités composées)}\\
&= P_{S_n=k-1}(X_{n+1}=1) = \frac{k-1}{1+1+n} = \frac{k-1}{2+n} \quad \text{(d'après la question 4 avec } k-1\in\mathbb{N}^* \text{ et } r=b=1)
\end{aligned}$$

(iii) Enfin, si $\ell = k$, on a de même

$$\begin{aligned}
P(S_{n+1} = k | S_n = \ell) &= \frac{P(S_{n+1} = k \cap S_n = k)}{P(S_n = k)} = \frac{P(S_{n+1} - S_n = 0 \cap S_n = k)}{P(S_n = k)} \\
&= \frac{P(X_{n+1} = 0 \cap S_n = k)}{P(S_n = k)} \\
&= \frac{P(S_n = k) P_{S_n = k}(X_{n+1} = 0)}{P(S_n = k)} \quad \text{(formule des probabilités composées)} \\
&= P_{S_n=k}(X_{n+1} = 0) = 1 - P_{S_n=k}(X_{n+1} = 1) \\
&= 1 - \frac{k}{1+1+n} = \frac{2+n-k}{2+n} \quad \text{(d'après la question 4 avec } k \in \mathbb{N}^* \text{ et } r = b = 1)
\end{aligned}$$

10. Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(S_n = \ell)_{\ell \in S_n(\Omega)} = (S_n = \ell)_{\ell \in [\![1, n+1]\!]}$, on a :

$$\begin{aligned}
P(S_{n+1} = k) &= \sum_{\ell=1}^{n+1} P(S_{n+1} = k \cap S_n = \ell) = \sum_{\ell=1}^{n+1} P(S_n = \ell) P_{S_n = \ell}(S_{n+1} = k) \\
&= P(S_n = k-1) P_{S_n = k-1}(S_{n+1} = k) + P(S_n = k) P_{S_n = k}(S_{n+1} = k) + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \notin \{k-1, k\}}}^{n+1} P(S_n = \ell) \underbrace{P_{S_n = \ell}(S_{n+1} = k)}_{=0} \\
&\quad \text{(car, comme } k \in [\![2, n+1]\!],\ k-1 \text{ et } k \in [\![1, n+1]\!]) \\
&= \frac{k-1}{n+2} P(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2} P(S_n = k).
\end{aligned}$$

11. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, "S_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$" (HR_n).
Initialisation : Pour $n = 0$, $S_0 = 1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 1]\!])$, donc on a bien HR_0.
Pour $n = 1$, on a $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2) = \mathcal{U}([\![0, 1]\!])$ d'après la question 1 avec $r = b = 1$. On a donc $S_1 = 1 + X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 2]\!])$. On a bien HR_1.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons HR_n vérifiée.
Alors on a $S_{n+1}(\Omega) = [\![1, n+2]\!]$ (d'après la question 3), $P(S_{n+1} = 1) = \dfrac{1}{n+2}$ (d'après la question 8), $P(S_{n+1} = n+2) = \dfrac{1}{n+2}$ (admis dans l'énoncé) et, pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
P(S_{n+1} = k) &= \frac{k-1}{n+2} P(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2} P(S_n = k) \\
&= \frac{k-1}{n+2} \frac{1}{n+1} + \frac{n+2-k}{n+2} \frac{1}{n+1} \quad \text{(d'après } HR_n \text{ avec } k-1 \text{ et } k \in S_n(\Omega) = [\![1, n+1]\!]) \\
&= \frac{n+1}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{n+2}.
\end{aligned}$$

On a donc bien $S_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n+2]\!])$, i.e. HR_{n+1}.
Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n+1]\!])$.

Exercice 2 - Résolution d'une équation fonctionnelle

I.1 - Existence de la solution

1. Soit $x > 0$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_k(x) = \dfrac{(-1)^k}{(x+k)^2} \underset{k \to +\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$.
Or $\sum_{k \geq 1} \dfrac{1}{k^2}$ converge absolument (Riemann et $2 > 1$), donc, par comparaison, $\sum_{k \geq 0} \varphi_k(x)$ converge absolument, donc converge.
Ceci étant valable pour tout $x > 0$, la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} \varphi_k$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

2. Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}
\varphi(x+1) + \varphi(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+1+k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(x+j)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} \\
&= -\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{(x+j)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} \\
&= \frac{1}{x^2} \quad \text{(télescopage).}
\end{aligned}$$

3. Soit $x > 0$.
La série $\sum\limits_{k\geq 0} \varphi_k(x)$ est alternée et la suite $(|\varphi_k(x)|)_{k\geq 0} = \left(\dfrac{1}{(x+k)^2}\right)_{k\geq 0}$ est décroissante et tend vers 0, donc, d'après le critère spécial des séries alternées,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \leq |\varphi_{n+1}(x)| = \frac{1}{(x+n+1)^2}.$$

4. • Toujours d'après le critère des séries alternées, on a, pour tout $x > 0$,

$$|\varphi(x)| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \leq |\varphi_0(x)| = \frac{1}{x^2}.$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$.
• D'après la question 2, on a aussi, pour tout $x > 0$, $\varphi(x+1) + \varphi(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
• φ est donc bien une solution de (P).

I.2 - Unicité de la solution

5. Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une solution de (P).
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (f(x+k+1) + f(x+k)) \quad \text{(car } f \text{ est solution de } (P))\\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f(x+k+1) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f(x+k) \quad \text{(on a le droit car ces sommes sont finies)}\\
&= -\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} f(x+k+1) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f(x+k)\\
&= -\sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j f(x+j) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f(x+k)\\
&= -(-1)^{n+1} f(x+n+1) + (-1)^0 f(x+0) \quad \text{(télescopage)}.
\end{aligned}$$

En ré-organisant, on a bien

$$\forall x > 0, \quad f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

6. Soit $x > 0$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation précédente, ce qui est possible car

— $\underbrace{(-1)^{n+1}}_{\text{borné}} \underbrace{f(\overbrace{x+n+1}^{\to+\infty})}_{\to 0} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, car f est solution de (P)

— et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{(x+k)^2} = \varphi(x)$ comme limite de la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{k\geq 0} \dfrac{(-1)^k}{(x+k)^2}$, dont la somme vaut $\varphi(x)$,

on obtient

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x) = \lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} = 0 + \varphi(x) = \varphi(x).$$

D'où, si f est solution de (P), alors $f = \varphi$, ce qui assure l'unicité de la solution de (P) (l'existence a été prouvée dans la sous-partie précédente).

Partie II - Etude de la solution du problème (P)

7. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $k \geq 0$, pour tout $x \geq \varepsilon$,

$$|\varphi_k(x)| = \frac{1}{(x+k)^2} \leq \frac{1}{(\varepsilon+k)^2},$$

donc $\|\varphi_k\|_\infty^{[\varepsilon,+\infty[} \leq \dfrac{1}{(\varepsilon+k)^2} \underset{k\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$.
Or $\sum\limits_{k\geq 1} \dfrac{1}{k^2}$ converge absolument (Riemann et $2 > 1$), donc, par comparaison, $\sum\limits_{k\geq 0} \dfrac{1}{(\varepsilon+k)^2}$, puis $\sum\limits_{k\geq 0} \|\varphi_k\|_\infty^{[\varepsilon,+\infty[}$ convergent absolument, donc convergent, donc $\sum\limits_{k\geq 0} \varphi_k$ converge normalement, donc uniformément, sur $[\varepsilon, +\infty[$.

8. • On a :

— pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_k : x \mapsto \dfrac{1}{(x+k)^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$ (comme inverse d'une fonction polynomiale qui ne s'annule pas),

— $\sum\limits_{k\geq 0} \varphi_k$ converge uniformément sur $[\varepsilon,+\infty[$,

donc, d'après le théorème de continuité sous le signe $\sum$, $\varphi = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \varphi_k$ est continue sur $[\varepsilon,+\infty[$.

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, φ est continue sur $]0,+\infty[$.

• Comme φ est solution de (P), on a, pour tout $x > 0$, $\varphi(x) + \varphi(x+1) = \dfrac{1}{x^2}$, donc

$$\varphi(x) = \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to+\infty} - \underbrace{\varphi(x+1)}_{\to\varphi(1)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x^2}.$$

$(\varphi(x+1) \underset{x\to 0^+}{\to} \varphi(1)$ par continuité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc en particulier en 1).

9. On a :
— Pour tout $k \in \mathbb{N}$, φ_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$,

$$\varphi_k'(x) = -\frac{2(-1)^k}{(x+k)^3} = \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}.$$

— $\sum\limits_{k\geq 0} \varphi_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question 1

— Pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $k \geq 0$, pour tout $x \geq \varepsilon$,

$$|\varphi_k'(x)| = \frac{2}{(x+k)^3} \leq \frac{2}{(\varepsilon+k)^3},$$

donc $\|\varphi_k'\|_\infty^{[\varepsilon,+\infty[} \leq \dfrac{2}{(\varepsilon+k)^3} = \underset{k\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{k^3}\right)$.

Or $\sum\limits_{k\geq 1} \dfrac{1}{k^3}$ converge absolument (Riemann et $3 > 1$), donc, par comparaison, $\sum\limits_{k\geq 0} \dfrac{2}{(\varepsilon+k)^3}$, puis $\sum\limits_{k\geq 0} \|\varphi_k'\|_\infty^{[\varepsilon,+\infty[}$ convergent absolument, donc convergent, donc $\sum\limits_{k\geq 0} \varphi_k'$ converge normalement, donc uniformément, sur $[\varepsilon,+\infty[$.

D'où, d'après le théorème de dérivation sous le signe $\sum$, $\varphi = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \varphi_k$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon,+\infty[$.

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x > 0$,

$$\varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}.$$

10. La série $\sum\limits_{k\geq 0} \varphi_k'(x) = \sum\limits_{k\geq 0} \dfrac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$ est alternée et la suite $(|\varphi_k(x)|)_{k\geq 0} = \left(\dfrac{2}{(x+k)^2}\right)_{k\geq 0}$ est décroissante et tend vers 0, donc, d'après le critère spécial des séries alternées, $\varphi'(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \varphi_k'(x)$ est du signe de son premier terme, donc négative.

φ est donc bien décroissante sur $]0,+\infty[$.

11. • Pour tout $x > 1$, $\varphi(x+1) \leq \varphi(x) \leq \varphi(x-1)$ car φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x-1, x, x+1 \in \mathbb{R}_+^*$.
En ajoutant $\varphi(x)$, on a donc

$$\varphi(x+1) + \varphi(x) \leq 2\varphi(x) \leq \varphi(x-1) + \varphi(x).$$

Enfin, comme φ est solution de (P) et $(x-1), x \in \mathbb{R}_+^*$, on a bien

$$\frac{1}{x^2} = \varphi(x+1) + \varphi(x) \leq 2\varphi(x) \leq \varphi(x-1) + \varphi(x) = \frac{1}{(x-1)^2}.$$

En divisant par $1/x^2$, on a alors

$$1 \leq \frac{2\varphi(x)}{1/x^2} = \frac{\varphi(x)}{1/(2x^2)} \leq \frac{x^2}{(x-1)^2}.$$

Or $\dfrac{x^2}{(x-1)^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\to} 1$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\varphi(x)}{1/(2x^2)} = 1$, et donc

$$\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x^2}.$$

Partie III - Expression intégrale de la solution du problème (P)

Soit $x > 0$.

12. Soit $k \in \mathbb{N}$.

Posons $u(t) = \ln(t)$, $u'(t) = \dfrac{1}{t}$, $v'(t) = t^{x+k-1}$, $v(t) = \dfrac{t^{x+k}}{x+k}$.

— u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$

— $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} u(t)v(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{x+k} t^{x+k}\ln(t) = 0$ par croissances comparées (et car $x+k>0$)

— Enfin, $\displaystyle\int_0^1 u'(t)v(t)dt = \int_0^1 \frac{1}{x+k}\frac{1}{t^{1-x-k}}dt$ converge (Riemann et $1-x-k<1$).

D'où, par intégration par parties, $\displaystyle\int_0^1 u(t)v'(t)dt = \int_0^1 t^{x+k-1}\ln(t)dt$ converge et

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{x+k-1}\ln(t)dt &= \left[\frac{1}{x+k}t^{x+k}\ln(t)\right]_0^1 - \frac{1}{x+k}\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x-k}}dt = 0 - \frac{1}{x+k}\left[\frac{t^{x+k}}{x+k}\right]_0^1 \\ &= 0 - \frac{1}{(x+k)^2} + 0 \quad (\text{car } x+k \geq x > 0) \\ &= -\frac{1}{(x+k)^2}.\end{aligned}$$

Comme de plus $t \mapsto t^{x+k-1}\ln(t)$ est de signe constant (négatif) sur $]0,1]$, l'intégrabilité de cette fonction sur $]0,1]$ est équivalente à la convergence de $\displaystyle\int_0^1 t^{x+k-1}\ln(t)dt$, et on a donc bien l'intégrabilité souhaitée.

13. Utilisons le théorème d'intégration terme à terme.

— Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_k : t \mapsto (-1)^k t^{x+k-1}\ln(t)$ est intégrable sur $]0,1[$ (d'après la question précédente).

— Pour tout $t \in]0,1[$, $\displaystyle\sum_{k\geq 0} f_k(t)$ converge (série géométrique de raison $-t \in]-1,1[$) et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t) = t^{x-1}\ln(t)\frac{1}{1+t}.$$

La série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geq 0} f_k$ converge donc simplement sur $]0,1[$ vers $f : t \mapsto \dfrac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}$, qui est continue (par morceaux) sur $]0,1[$.

— Enfin, pour tout $k \geq 0$,

$$\int_0^1 |f_k(t)|dt = \int_0^1 -t^{x+k-1}\ln(t)dt = \frac{1}{(x+k)^2} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}.$$

Or $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}$ converge absolument (Riemann et $2>1$), donc, par comparaison, $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\int_0^1 |f_k(t)|dt$ converge absolument, donc converge.

D'où, d'après le théorème d'intégration terme à terme, $f : t \mapsto \dfrac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}$ est intégrable sur $]0,1[$ et

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)dt = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 f_k(t)dt = \sum_{k=0}^{+\infty} -(-1)^k\frac{1}{(x+k)^2} = -\varphi(x),$$

donc on a bien

$$\varphi(x) = -\int_0^1 \frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}dt.$$

Exercice 3 - Approximation d'une racine carrées par la méthode de Héron

Partie I - Approximation de la racine carrée d'un réel positif

Pour montrer que la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est correctement définie, on peut montrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, "pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f_k(x)$ existe et $f_k(x) > 0$" (HR_k) et, en rajoutant le caractère strictement positif dans HR_k, l'hérédité se passe très bien.

I.1 - Convergence de la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}(f_k(x))^2 - x &= \frac{1}{4}\left(f_{k-1}(x) + \frac{x}{f_{k-1}(x)}\right)^2 - x \\ &= \frac{1}{4}f_{k-1}(x)^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\frac{x^2}{f_{k-1}(x)^2} - x \\ &= \frac{1}{4}\left(f_{k-1}(x)^2 - 2x + \frac{x^2}{f_{k-1}(x)^2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(f_{k-1}(x) - \frac{x}{f_{k-1}(x)}\right)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Comme on a par ailleurs

$$(f_k(x))^2 - x = (f_k(x) - \sqrt{x})\underbrace{(f_k(x) + \sqrt{x})}_{>0 \text{ car } f_k(x)>0},$$

on obtient $f_k(x) - \sqrt{x} = \dfrac{(f_k(x))^2 - x}{f_k(x) + \sqrt{x}} \geq 0$ comme quotient de deux positifs.
On a donc bien $f_k(x) \geq \sqrt{x}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$f_{k+1}(x) - f_k(x) = \frac{1}{2}\left(f_k(x) + \frac{x}{f_k(x)}\right) - f_k(x) = \frac{1}{2\underbrace{f_k(x)}_{>0}}\underbrace{\left(x - (f_k(x))^2\right)}_{\leq 0} \leq 0,$$

donc la suite $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est bien décroissante.

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
La suite $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante et minorée par $\sqrt{x}$, donc elle converge vers un réel $\ell(x) \geq \sqrt{x}$.
Comme de plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f_{k+1}(x) = \dfrac{1}{2}\left(f_k(x) + \dfrac{x}{f_k(x)}\right)$, donc $2f_{k+1}(x)f_k(x) = (f_k(x))^2 + x$, on obtient, en passant à la limite :

$$2(\ell(x))^2 = (\ell(x))^2 + x \Leftrightarrow (\ell(x))^2 = x \Leftrightarrow \ell(x) = \pm\sqrt{x}$$

et, comme $\ell(x) \geq \sqrt{x} \geq 0$, on a donc $\ell(x) = \sqrt{x}$, donc

$$\lim_{k\to+\infty} f_k(x) = \sqrt{x}.$$

Ceci étant valable pour tout $x \geq 0$, on a bien établi la convergence simple de la suite de fonctions $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vers la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x}$.

I.2 - Majoration de l'erreur

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{f_k(x) - \sqrt{x}}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right) = \frac{1}{2}\left(f_k(x) - \sqrt{x} - \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}^2}{f_k(x)}\right) = \frac{1}{2}\left(f_k(x) + \frac{x}{f_k(x)}\right) - \sqrt{x} = f_{k+1}(x) - \sqrt{x}.$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|f_{k+1}(x) - \sqrt{x}| = \frac{|f_k(x) - \sqrt{x}|}{2}\underbrace{\left|1 - \frac{\overbrace{\sqrt{x}}^{\in[0,1]}}{f_k(x)}\right|}_{\in[0,1]} \leq \frac{1}{2}|f_k(x) - \sqrt{x}|.$$

De plus, pour $k = 0$, on a

$$\begin{aligned}|f_1(x) - \sqrt{x}| \leq \frac{1}{2}|\overbrace{f_0(x)}^{=1} - \sqrt{x}| &= \frac{|1-\sqrt{x}|}{2} \\ &\leq \frac{|1-\sqrt{x}|}{2}\underbrace{(1+\sqrt{x})}_{\geq 1} = \frac{|1-\sqrt{x}|}{2}|1+\sqrt{x}| \\ &= \frac{|1-x|}{2} \leq \frac{1+x}{2} \quad \text{(inégalité triangulaire)},\end{aligned}$$

donc on a bien, par récurrence immédiate, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$|f_k(x) - \sqrt{x}| \leq \frac{1+x}{2^k}.$$

Grâce à cette inégalité, on aura convergence uniforme de la suite de fonction $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$, car

$$\|f_k(x) - \sqrt{x}\|_\infty^{[a,b]} \leq \frac{1+b}{2^k} \underset{k\to+\infty}{\to} 0.$$

Partie II - Généralités sur les racines carrées d'une matrice

6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A admet une racine carrée B, alors $A = B^2$, donc

$$\det(A) = \det(B^2) = (\underbrace{\det(B)}_{\in\mathbb{R}})^2 \geq 0.$$

7. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a $\det(A) = 0 \geq 0$.
S'il existe $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $B^2 = A$, alors on a :

$$\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+bc = 0 \\ b(a+d) = 1 \\ c(a+d) = 0 \\ d^2+bc = 0 \end{cases}.$$

D'où, d'après L_2, on a $a+d \neq 0$, donc, d'après L_3, on a $c = 0$, puis d'après L_1 et L_4, on a $a = 0$ et $d = 0$, donc $a+d = 0$. On a une contradiction. D'où, par l'absurde, A n'a pas de racine carrée.
La réciproque de la question précédente est donc fausse.

8. S est une matrice symétrique réelle, donc, d'après le théorème spectral, elle est diagonalisable (dans une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

9. • Comme P est orthogonale, on a $P^{-1} = P^T$, donc

$$R^T = (P\Delta P^{-1})^T = (P\Delta P^T)^T = (P^T)^T\Delta^T P^T = P\Delta P^T = R,$$

donc R est symétrique.
• De plus,

$$R^2 = (P\Delta \underbrace{P^{-1})(P}_{=I_n} \Delta P^{-1}) = P\Delta\Delta P^{-1} = PDP^{-1} = S.$$

• R est donc bien une racine carrée symétrique de S.

Partie III - Approximation d'une racine carrée d'une matrice symétrique

10. • $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P^{-1}I_nP = I_n$ est diagonale et ses coefficients diagonaux sont strictement positifs, donc $I_n \in C_P$.
• Tous les éléments de $\mathcal{D}_n^+$ sont inversibles car diagonaux à coefficient diagonaux tous non nuls.
D'où, si $M \in C_P$, comme $D = P^{-1}MP \in \mathcal{D}_n^+$ est inversible, M est semblable à une matrice inversible, donc est inversible.
Si on veut prouver ce dernier point, on peut passer par le déterminant par exemple.
• Enfin, $\frac{1}{2}(M + SM^{-1}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$\begin{aligned} P^{-1}\left(\frac{1}{2}(M+SM^{-1})\right)P &= \frac{1}{2}\left(P^{-1}MP + P^{-1}SM^{-1}P\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(P^{-1}MP + P^{-1}SPP^{-1}M^{-1}P\right) = \frac{1}{2}\left(P^{-1}MP + P^{-1}SPP^{-1}M^{-1}(P^{-1})^{-1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(P^{-1}MP + P^{-1}SP(PMP^{-1})^{-1}\right). \end{aligned}$$

Par suite, en notant $\operatorname{diag}(a_1,\ldots,a_n) = P^{-1}MP$ avec $a_i > 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a

$$P^{-1}\left(\frac{1}{2}(M+SM^{-1})\right)P = \frac{1}{2}\left(\operatorname{diag}(a_1,\ldots,a_n) + \operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\operatorname{diag}(a_1^{-1},\ldots,a_n^{-1})\right) = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{2}(a_1+\lambda_1a_1^{-1}),\ldots,\frac{1}{2}(a_n+\lambda_na_n^{-1})\right)$$

où cette matrice est bien diagonale et ses coefficients diagonaux, $\frac{1}{2}(a_i+\lambda_ia_i^{-1})$ sont bien strictement positifs comme somme et produit de termes strictement positifs.
On a donc bien $\frac{1}{2}(M+SM^{-1}) \in C_P$.

11. • Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
V_k &= P^{-1}U_kP = P^{-1}\left(\frac{1}{2}(U_{k-1} + SU_{k-1}^{-1})\right)P \\
&= \frac{1}{2}P^{-1}U_{k-1}P + \frac{1}{2}P^{-1}S\underbrace{PP^{-1}}_{=I_n}U_{k-1}^{-1}P = \frac{1}{2}(P^{-1}U_{k-1}P) + \frac{1}{2}(P^{-1}SP)(P^{-1}U_{k-1}P)^{-1} \\
&= \frac{1}{2}V_{k-1} + \frac{1}{2}DV_{k-1}^{-1} = \frac{1}{2}(V_{k-1} + DV_{k-1}^{-1}).
\end{aligned}$$

• Montrons par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, "$V_k = \begin{pmatrix} f_k(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & f_k(\lambda_n) \end{pmatrix}$" (HR_k).

Initialisation : Comme $f_0 : x \mapsto 1$ et $V_0 = P^{-1}U_0P = P^{-1}I_nP = I_n$, on a bien HR_0.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ et supposons HR_k vérifiée.
Alors

$$\begin{aligned}
V_{k+1} &= \frac{1}{2}(V_k + DV_k^{-1}) \quad \text{(d'après le premier point avec } k+1 \in \mathbb{N}^*) \\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{diag}(f_k(\lambda_1), \ldots, f_k(\lambda_n)) + \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\mathrm{diag}(f_k(\lambda_1), \ldots, f_k(\lambda_n))^{-1}) \quad \text{(d'après } HR_k) \\
&= \mathrm{diag}\left(\frac{1}{2}\left(f_k(\lambda_1) + \frac{\lambda_1}{f_k(\lambda_1)}\right), \ldots, \frac{1}{2}\left(f_k(\lambda_n) + \frac{\lambda_n}{f_k(\lambda_n)}\right)\right) \quad \text{(calcul matriciel avec des matrices diagonales)} \\
&= \mathrm{diag}(f_{k+1}(\lambda_1), \ldots, f_{k+1}(\lambda_n)) \quad \text{(par définition de } f_{k+1}).
\end{aligned}$$

On a donc bien HR_{k+1}.

Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $V_k = \begin{pmatrix} f_k(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & f_k(\lambda_n) \end{pmatrix}$.

L'application N introduite dans l'énoncé est bien une norme car c'est la norme associé au produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\langle A, B \rangle = tr(AB^T) = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{i,j}b_{i,j}.$$

Pour démontrer efficacement que N est une norme, il faut introduire ce produit scalaire, montrer que c'en est un, puis dire que N est la norme associée.

12. Rappelons que, comme P est orthogonale, on a $P^{-1} = P^T$. De plus, on a $V_k = P^{-1}U_kP = P^TU_kP$ et $\Delta = P^{-1}RP = P^TRP$, donc $\Delta - V_k = P^T(R - U_k)P$ et, par suite,

$$\begin{aligned}
N(\Delta - V_k) &= \sqrt{\mathrm{tr}((\Delta - V_k)(\Delta - V_k)^T)} = \sqrt{\mathrm{tr}(P^T(R - U_k)P(P^T(R - U_k)P)^T)} \\
&= \sqrt{\mathrm{tr}(P^T(R - U_k)\underbrace{PP^T}_{=I_n}(R - U_k)^T(P^T)^T)} = \sqrt{\mathrm{tr}((P^T(R - U_k)(R - U_k)^T)P)} \\
&= \sqrt{\mathrm{tr}(P(P^T(R - U_k)(R - U_k)^T))} \quad (\text{car } \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)) \\
&= \sqrt{\mathrm{tr}(\underbrace{PP^T}_{=I_n}(R - U_k)(R - U_k)^T))} = \sqrt{\mathrm{tr}((R - U_k)(R - U_k)^T))} = N(R - U_k).
\end{aligned}$$

13. D'où, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
N(R-U_k) &= N(\Delta - V_k) = \sqrt{\operatorname{tr}((\Delta - V_k)(\Delta - V_k)^T)} \\
&= \sqrt{\operatorname{tr}(\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1} - f_k(\lambda_1), \dots, \sqrt{\lambda_n} - f_k(\lambda_n))\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1} - f_k(\lambda_1), \dots, \sqrt{\lambda_n} - f_k(\lambda_n))^T)} \\
&= \sqrt{\operatorname{tr}(\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1} - f_k(\lambda_1), \dots, \sqrt{\lambda_n} - f_k(\lambda_n))\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1} - f_k(\lambda_1), \dots, \sqrt{\lambda_n} - f_k(\lambda_n)))} \\
&= \sqrt{\operatorname{tr}(\operatorname{diag}((\sqrt{\lambda_1} - f_k(\lambda_1))^2, \dots, (\sqrt{\lambda_n} - f_k(\lambda_n))^2))} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\sqrt{\lambda_i} - f_k(\lambda_i))^2} \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (f_k(\lambda_i) - \sqrt{\lambda_i})^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \underbrace{(f_k(\lambda_i) - \sqrt{\lambda_i})}_{\geq 0} \underbrace{(f_k(\lambda_j) - \sqrt{\lambda_j})}_{\geq 0}} \\
&= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} (f_k(\lambda_i) - \sqrt{\lambda_i}) \right)^2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (f_k(\lambda_i) - \sqrt{\lambda_i}) \quad \text{(car cette quantité est positive)} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1 + \lambda_i}{2^k} = \frac{n + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i}{2^k} \\
&= \frac{n + \operatorname{tr}(D)}{2^k} = \frac{n + \operatorname{tr}(S)}{2^k},
\end{aligned}$$

car S et D sont semblables, donc ont la même trace.

14. Comme $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{n + \operatorname{tr}(S)}{2^k} = 0$ (suite géométrique de raison $1/2 \in]-1, 1[$), on a, d'après le théorème des gendarmes (une norme est positive), $\lim\limits_{k \to +\infty} N(R - U_k) = 0$, donc la suite $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers R (pour la norme N, mais, comme on est en dimension finie, la convergence ne dépend pas de la norme choisie).