

Un nouveau calcul de l'intégrale de Dirichlet

1) pour $x \geq 0$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ et $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt$

on pose $h: \begin{cases} \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ & \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \end{cases}$

• Soit $x \geq 0$,

$$t \mapsto h(x, t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+), \text{ positive}$$

$$h(x, t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{ y compris pour } x=0$$

Par Riemann ($2>1$)... et par comp. de fcts. positives,
 f est définie sur $\mathbb{R}^+$

► pour $g(x)$:

* si $x=0$: cf cours

* si $x > 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^A \frac{\sin(t)}{x+t} dt &\stackrel{\text{IPP}}{=} \left[-\frac{\cos(t)}{x+t} \right]_0^A - \int_0^A \frac{\cos t}{(x+t)^2} dt \\ &= \underbrace{\frac{-\cos(A)}{x+A}}_{\rightarrow 0} + \frac{1}{x} - \int_0^A \frac{\cos(t)}{(x+t)^2} dt \end{aligned}$$

et $t \mapsto \frac{\cos(t)}{(x+t)^2}$ est continue sur $[0; +\infty[$ et $\left| \frac{\cos(t)}{(x+t)^2} \right| = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$

où $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ intégrable au v. de $+\infty$ (par Riemann $2>1$) donc
par comp. de fonctions positives, $\frac{-\cos(t)}{(x+t)^2}$ intégrable donc
converge sur $[1; +\infty[$ donc sur $[0; +\infty[$.

Donc g est bien définie sur $\mathbb{R}^+$

$$2) \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt$$

On fait un cv: $u = x+t$ avec $t \mapsto x+t \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$ et bijectif
 $x > 0$ et $du = dt$ de $\mathbb{R}_*^+$ dans $]x; +\infty[$

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u-x)}{u} du \\ &= \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u) \cos(x) - \sin(x) \cos(u)}{u} du \\ &= \phi(x) \cos x + \psi(x) \sin(x) \end{aligned}$$

$$\phi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du, \text{ existe bien}$$

$$\psi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{-\cos u}{u} du \text{ existe bien}$$

3) Continuité de g

$$\bullet \quad u \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(u)}{u} & \text{si } u \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{continue sur } \mathbb{R}^+$$

d'après le cours, ϕ est une primitive de u donc elle est continue sur $\mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad \psi(x) \sin(x) &= \left(\int_x^{+\infty} \frac{-\cos u}{u} du \right) \times \sin(x) \\ &= \left(\int_1^{+\infty} \frac{-\cos u}{u} du + \int_x^1 \frac{1-\cos u}{u} du - \int_x^1 \frac{du}{u} \right) \sin(x) \\ &= \left(C + \underbrace{\int_x^1 \frac{1-\cos u}{u} du}_{C^0 \text{ sur } \mathbb{R}_*^+} \right) \sin x + \underbrace{\ln x \sin x}_{C^0 \text{ sur } \mathbb{R}_*^+} \\ &= - \text{une primitive de } u \mapsto \begin{cases} \frac{1-\cos(u)}{u} & \text{si } u \neq 0 \\ 0 & \text{si } u = 0 \end{cases} \quad C^0 \\ &\text{donc une } f^0 \text{ continue} \end{aligned}$$

avec $\ln x \sin x = x \ln x \times \frac{\sin(x)}{x} \longrightarrow 0 \times 1 = 0$

EIP

Donc g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\text{et } g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du \times 1 + 0 = g(0)$$

(à tester avec une IPP!)

Donc $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$ puis $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ par th de cté.

$$H1) \forall t \in [0, +\infty[, x \mapsto h(x, t) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+)$$

$$H2) \forall x \in [0, +\infty[, t \mapsto h(x, t) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+)$$

$$H3) \text{ Domination, } \forall x, t \in \mathbb{R}^+, |h(x, t)| = \left| \frac{1}{(1+t^2)e^{xt}} \right| \leq \frac{1}{1+t^2}$$

où $\phi(t)$ intégrable ($t \mapsto \frac{1}{1+t^2} \sim \frac{1}{t^2}$ intégrable par Riemann puis comp. f° positives) et CPM sur $\mathbb{R}^+$ $= \phi(t)$

Conclusion: $f: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$

4) Pour f , on applique le thm de classe $\mathcal{C}^2$ sous l'intégrale

$$H1) \forall t \in \mathbb{R}, x \mapsto h(x, t) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*)$$

$$H2) \forall x \in \mathbb{R}_+^*, t \mapsto h(x, t) \text{ intégrable (cf 1 ou 3)}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = \frac{-t e^{-xt}}{1+t^2} \text{ intégrable sur } \mathbb{R}^+ (\dots o(\frac{1}{t^2}))$$

$$H3) \forall x \in \mathbb{R}_+^*,$$

$$\bullet t \mapsto \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) = \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$$

• Sur tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*, \forall x \in [a, b], \forall t \in \mathbb{R}^+,$

$$\left| \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \frac{t^2 e^{-at}}{1+t^2} = \phi(t) \text{ avec } \phi \text{ intégrable... et CPM}$$