Limite et intégrale

Exercice 18 :

$$\int_{a_n}^{b_n} f_n(t)dt = \int_{a_n}^{\alpha} f_n(t)dt + \int_{\alpha}^{\beta} f_n(t)dt + \int_{\beta}^{b_n} f_n(t)dt$$

Montrons que $\int_{a_n}^{\alpha} f_n(t)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$$\left|\int_{a_n}^{\alpha} f_n(t)dt\right| \leq \int_{\alpha}^{a_n} |f_n(t)|dt$$

$$\leq \int_{\alpha}^{a_n} |f_n(t) - f(t) + f(t)|dt$$

$$\leq \int_{\alpha}^{a_n} |f_n(t) - f(t)| - \int_{\alpha}^{a_n} |f(t)|dt$$

$$\leq \int_{\alpha}^{a_n} \|f_n - f\|_\infty + \int_{\alpha}^{a_n} |f(t)|dt$$

$$\leq |a_n - \alpha| \, \|f_n - f\|_\infty + F(a_n) - F(\alpha)$$

Or $F : x \mapsto \int_{\alpha}^{x} |f|$ l'unique primitive de $|f|$ s'annulant en α continue car $|f|$ car f l'est et f est limite uniforme de fct° continues

$n \to +\infty$

$$\left|\int_{a_n}^{\alpha} f_n(t)dt\right| \leq |\alpha - \alpha| \, \|f_n - f\|_\infty + F(\alpha)$$

$$\left|\int_{a_n}^{\alpha} f_n(t)dt\right| \to 0$$

de la m̂ manière $\int_{\beta}^{b_n} f_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Il reste à calculer $\int_{\alpha}^{\beta} f_n(t)\,dt$

H_1. ~~$\forall n\in\mathbb{N}$~~ $f_n \xrightarrow{CU} f$

H_2 $\forall n\in\mathbb{N}$ f_n est continue sur $[\alpha,\beta]$

alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_n(t)\,dt \longrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt$$

2°) $n\int_1^{1+1/n} g(t^n)\,dt = I_n$

changement de variable: $t^n = s$; ~~$t=0$~~ $t = s^{1/n}$

$$dt = \frac{s^{1/n-1}\,ds}{n}$$

$$I_n = \int_1^{(1+\frac{1}{n})^n} g(s)\, s^{1/n-1}\,ds$$

$\forall n\in\mathbb{N}$ $a_n = 1 \to 1$
$b_n = (1+\frac{1}{n})^n \to e$

$f_n : s \longmapsto \frac{g(s)}{s} s^{1/n}$ continue sur $[1, e]$

par opérations

$\forall s \in [1, e]$

$\left| \frac{g(s)}{s} s^{1/n} - \frac{g(s)}{s} \right|$

$= \left| \frac{g(s)}{s} (s^{1/n} - 1) \right|$

g est continue sur $[1, e]$ bornée, donc $\|g\|_\infty$ existe

$\leq \frac{\|g\|_\infty}{s} |(s^{1/n} - 1)|$

$\leq \|g\|_\infty \frac{|(s^{1/n} - 1)|}{s}$

$\leq \|g\|_\infty \frac{e^{1/n \ln(s)} - 1}{s}$

$\leq \underbrace{\|g\|_\infty \, e^{1/n} - 1}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$ indépendant de s

donc $\frac{g(s)}{s} s^{1/n} \xrightarrow{CU} \frac{g(s)}{s}$

d'après 1°) $I_n \longrightarrow \int_1^e \frac{g(s)}{s} ds$