Vrai ou faux

1. Prop : toute partie de $\mathbb{N}$ est finie ou dénombrable   Vrai

2. $\mathbb{Q}$ est dénombrable et un produit cartésien d'ensemble dénombrable est dénombrable   Vrai

3. $\mathbb{R} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{surjection}} \mathbb{R}$

$(x, k) \longmapsto x$

si $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ était dénombrable $\mathbb{N} \underset{f}{\xrightarrow{\text{bij}}} \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \underset{g}{\xrightarrow{\text{surj}}} \mathbb{R}$

donc la composée $g \circ f$: $\mathbb{N} \xrightarrow{\text{surj}} \mathbb{R}$ donc $\mathbb{R}$ dénombrable ou fini : Faux !

Vrai, $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ n'est pas dénombrable

4. Vrai, cours

5. Faux mais si une série converge absolument ... Vrai

Exercice 2 :

$\mathbb{U} = \{ e^{i\theta} \text{ tq } \theta \in [0, 2\pi[\}$ $([-\pi, \pi[)$

$f : \begin{vmatrix} [0, 2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{U} \\ \theta & \longmapsto & e^{i\theta} \end{vmatrix}$ bijection (unique θ ...)

or $[0, 2\pi[$ n'est pas dénombrable

car $[0, 1[$ partie infinie de $[0, 2\pi[$ non dénombrable

ou $\begin{vmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow &]0, 1[\\ x & \longmapsto & \frac{1}{\pi} \text{Arctan}(x) + \frac{1}{2} \end{vmatrix}$ ou $\begin{vmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow &]-\pi, \pi[\\ x & \longmapsto & 2 \text{Arctan}(x) \end{vmatrix}$ bij donc $]-\pi, \pi[$ pas dénombrable

bijection

donc U non dénombrable

$E = \{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!], n \in \mathbb{N}^* \}$

$= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} U_n$

et $\mathbb{N}^*$ est dénombrable, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ U_n est finie (de card n)

donc E est fini ou dénombrable

mais E n'est pas fini en prenant k premier avec n

donc E est dénombrable