Mathématiques 1

Présentation du sujet

Le sujet étudie l'existence, puis l'unicité sous certaines conditions, d'une fonction de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ dont on a fixé à priori les valeurs des dérivées successives en 0. La première partie s'intéresse au cas des fonctions développables en série entière au voisinage de 0 et propose plusieurs exemples. La seconde partie est consacrée à une démonstration du théorème d'existence de Borel, basée sur la fonction $e^{1/(x(1-x))}$ dite fonction en cloche, et la construction d'une série de fonctions normalement convergente sur $\mathbb{R}$: cette preuve est adaptée aux outils du programme de PC. La partie 3 construit une fonction C^∞ à support compact dont les dérivées sont uniformément majorées par une suite fixée à priori. Cette fonction est utilisée dans la partie 4, qui est consacrée à l'étude d'une classe de fonctions dont les dérivées successives en 0 déterminent complètement la valeur sur $\mathbb{R}$ tout entier. Le sujet est assez directif et permet de décrire une bonne partie du programme d'analyse.

Analyse globale des résultats

Ce sujet bien adapté aux étudiants de PC a permis de discriminer très correctement les candidats. La partie consacrée aux séries entières, notamment concernant la notion de rayon de convergence n'a pas été la mieux réussie. La partie II commence par un calcul numérique délicat qui a permis de mettre en valeur les candidats soigneux et débouche sur l'écriture d'un algorithme que le barème a largement pris en compte. De nombreuses questions du problème font appel à un raisonnement par récurrence : sur ce point on attend des candidats une rédaction très claire et un énoncé non ambigu de la proposition que l'on souhaite prouver. Les parties II, III et IV utilisent à plein des notions du programme de première année qu'il fallait avoir parfaitement assimilé, notamment en ce qui concerne les intégrales dépendant des bornes. Les meilleures copies, sur ce sujet long mais sans réelle difficulté, sont celles qui ont fait preuve de constance dans la rigueur et de simplicité dans les arguments.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

Ce sujet est particulièrement long et le barème est réparti sur l'ensemble du problème. Certaines copies ont réalisé ainsi des performances honorables en acceptant d'admettre certains résultats donnés dans le problème. Sans recommander un grappillage souvent stérile, nous attirons l'attention sur le fait que la faculté d'adaptation, entre autres à la longueur d'un problème, fait naturellement partie des qualités demandées à un futur ingénieur. Sur le plan technique, les étudiants doivent savoir qu'ils perdent énormément de points pour des erreurs liées au mauvais maniement des valeurs absolues ; inégalités triangulaires douteuses, apparition, disparition de valeurs absolues au gré des lignes, majorations dans les valeurs absolues. Pour citer un exemple, en III.A.2.a, une grande proportion des copies démontre plus ou moins bien l'inégalité $f_0(x) \leqslant 1/a_0^2$, puis en déduisent que $|f_0(x)| \leqslant 1/a_0^2$ sans mentionner le signe de $f_0(x)$.

Partie I

A.1 Inutile de démontrer que toute série entière est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence : c'est un théorème du cours qu'il suffit d'énoncer.

B.1 Il s'agit ici de prouver que le rayon de convergence est infini ou de reconnaitre la fonction $\exp(2x)$.

B.2 La justification du rayon de convergence est souvent omise, ou parfois mal rédigée puisque ici certains termes de la série sont nuls. Rares sont les copies qui proposent une solution sur $\mathbb{R}$, ce qui était demandé. On note que trop peu de copies reconnaissent la fonction $x \mapsto 1/(1+x^2)$.

C On ne peut affirmer sans justifier que la série $(\sum x^n (2n)!/n!)$ diverge pour toutes les valeurs de x non nulles. L'utilisation de l'équivalent de Stirling est maladroite ici.

Partie II

A.1.a Il faut indiquer dans la proposition de récurrence *l'existence du polynôme* Q_p et vérifier dans la démonstration que l'on obtient bien un polynôme. Un nombre important de copies arrive au bon résultat, ce qui rassure sur l'aisance calculatoire des candidats.

A.1.b On attend la formule $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$. De nombreux candidats oublient de vérifier que le coefficient du terme censé être de plus haut degré n'est pas nul.

A.1.c L'algorithme demandé a été abordé dans moins d'une copie sur trois, mais souvent correctement. Il devait bien entendu s'appuyer sur la formule de récurrence de l'A.1 : les candidats doivent savoir que ces questions sont très largement rémunérées dans le barème.

A.2.a Une vague évocation de la prépondérance de la fonction exponentielle sur les fonctions rationnelles ne peut suffire à justifier la réponse ici, on attend une rédaction précise.

A.2.b On souhaite que les candidats évoquent un théorème de raccord de classe C^k et donc parle clairement de la valeur des dérivées de g en dehors de $[0,1]$. Cette question est sans doute la moins bien traitée, les candidats constatant trop brièvement que les dérivées se prolongent bien par continuité en 0 et 1 grâce aux limites du a, ce qui prouve que la notion de dérivée est dans l'ensemble mal assimilée.

B.1 Le caractère C^∞ de g est souvent très mal démontré, alors qu'il suffit d'introduire en le justifiant une primitive de g. Certaines copies consacrent du temps à prouver l'intégrabilité des fonctions, qui est triviale (continuité sur un segment) et n'est pas demandée. On constate d'ailleurs souvent une confusion entre intégrale et primitive.

B.2 a) b) La fonction φ en plateau porte bien son nom, elle est en effet constante égale à 1 sur l'intervalle $[-1/2, 1/2]$, on pouvait exploiter ce résultat pour en déduire la valeur $\varphi^{(p)}(0)$, peu de copies le remarquent.

B.2.c Cette question est souvent bien traitée, mais on voit parfois apparaitre de façon surprenante le théorème de Rolle !

C.2.a Trop de copies tentent une démonstration par récurrence de la formule proposée, alors qu'il s'agit d'une application directe de la formule de Leibnitz.

C.2.d Cette question a été discriminante : en effet la majoration demandée demande beaucoup de soin et une bonne compréhension de la définition du nombre β_n. On met en garde les candidats qui tentent d'abuser le correcteur en parachutant le résultat demandé au bout de quelques lignes vaguement correctes : cela ne peut que nuire à la crédibilité du reste de la copie.

C.4 Trop peu de copies énoncent correctement le théorème de dérivation des séries de fonctions et sa généralisation aux fonctions de classe C_k : il fallait mettre en évidence la convergence simple de la série σ et la convergence normale des séries dérivées, malheureusement les hypothèses de ce théorème sont bien mal connues. À décharge des candidats la question arrivait en fin de partie II la partie III plus facile était sans doute plus attractive.

Partie III

A.1 Cette question évidente a donné lieu sur certaines copies à des développements inutiles, notamment en ce qui concerne la continuité.

A.2.b Une majoration de la valeur absolue de la dérivée sur $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$, combinée avec la continuité de f, permet d'en déduire le résultat. Les copies qui ont étudié les différents cas pour majorer $|f(x) - f(y)|$ se sont pour la plupart contentées de prendre x et y dans le même intervalle ce qui n'est pas suffisant pour conclure.

B Cette question ne présente pas de difficultés mais on attend des candidats une rédaction parfaite des majorations en valeur absolue pour les intégrales, ce qui n'est malheureusement souvent pas le cas. Remarquons que la majoration de la dérivée obtenue au B.3 ne permet pas d'en déduire la réponse au B.4, contrairement à ce qu'affirment de nombreux candidats, puisque la suite (a_n) est décroissante : reconnaitre honnêtement ce point incite le correcteur à plus de bienveillance pour la suite.

C On reprend les arguments de la partie B, couplés avec un raisonnement par récurrence. Les mêmes défauts que dans les questions précédentes apparaissent donc : mauvaise mise en forme de la récurrence, majoration en valeurs absolues mal rédigée, mauvaise exploitation des hypothèses de monotonie pour la suite (a_n). À noter que la question C.5 a permis de trier les très bonnes copies : de nombreux candidats permutent sans se poser de question deux intégrales dont l'une possède des bornes variables, prouvant ainsi qu'ils n'ont pas compris la définition même d'une intégrale.

D.1.a Question discriminante : on constate avec plaisir que les techniques vues en cours pour démontrer le théorème fondamental de l'analyse sont très bien réinvesties dans les toutes meilleures copies. À ce sujet l'apprentissage des démonstrations importantes du cours d'analyse est incontournable pour réussir une telle épreuve.

D.2 Question facile, on attend des justifications courtes, utilisant la définition et les propriétés d'une limite simple , mais les arguments sont souvent confus.

D.3 Deux approches possibles pour cette question, le théorème de convergence dominée ou le théorème d'intégration terme à terme.

D.4, 5 Ces deux questions ont été traitées souvent superficiellement, les candidats se contentant, à juste titre, de reprendre les arguments précédemment évoqués. Il fallait cependant un minimum de rigueur pour s'y voir attribuer des points.

Partie IV

Cette partie indépendante des trois autres (seule la dernière question utilise la fonction w de la partie III) a permis aux candidats débordés par le problème de tenter de raccrocher quelques points. Mais ce sont souvent les candidats qui avaient déjà fait preuve de constance dans la rigueur qui ont su aborder correctement A.2, A.3 et B2. Les parties C et D ne sont que très rarement abordées.

Conclusions

Ce problème est bien adapté au programme de PC, long, mais plutôt facile. Il a permis de valoriser les copies faisant preuve de rigueur et d'efficacité, et de bien classer les candidats. Les outils de l'analyse introduits en PC sont exploités, mais de nombreuses questions traitent du programme de première année. L'impression générale est mitigée : sur une moitié des copies, on trouve beaucoup d'affirmations non étayées (concernant souvent des questions dont le résultat était donné dans l'énoncé) et un manque de rigueur inquiétant. À l'inverse un quart des copies sont bien rédigées et font preuve de finesse, certaines copies remarquables sur ce long sujet.

Comme chaque année on peut conseiller au candidat de consacrer quelques minutes à bien lire le sujet en entier, pour anticiper les outils qu'il pourrait appliquer, et de ne pas négliger les questions faisant appel au calcul formel, partie qui figure explicitement au programme.