CHAPITRE

Suites vérifiant une relation de récurrence linéaire (corrigé)

I RÉCURRENCE LINÉAIRE D'ORDRE 1

Les suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 1 à cœfficients constants sont les suites arithmético-géométrique, telles qu'on ait $a, b \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = au_n + b.$$

Il s'agit d'un problème linéaire associé à l'application linéaire

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ u & \longmapsto & (u_{n+1} - au_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$$

L'ensemble des solutions est soit vide, soit un sous-espace affine de direction $\operatorname{Ker} f$.

On vérifie qu'en fait, il n'est jamais vide.

Il s'agit donc des suites de la forme $u = \tilde{u} + v$ où $\tilde{u}$ est une solution particulière qu'on pourra chercher constante (sauf si $a = 1$, mais alors la suite est arithmétique et on sait faire) et v solution de l'équation homogène associée : $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad v_{n+1} = av_n$, c'est-à-dire une suite géométrique de raison a.

Notons que dans ce cas, l'espace (affine) des solutions est de dimension 1.

II RÉCURRENCE LINÉAIRE D'ORDRE 2 HOMOGÈNE

1 Position du problème

Soit $a, b \in \mathbb{K}$ et F l'ensemble des suites u telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n. \tag{1}$$

Exemple

La suite de Fibonacci définie par $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

   Il s'agit du noyau de l'endomorphisme $f : u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Vérifier que l'application $\phi : \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ u & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

   Elle est linéaire et à caque couple $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ correspond bine une et une seule suite de F dont ce sont les deux premiers termes vu la relation de récurrence.

3. Quelle est la dimension de F ?

   Donc $\dim F = 2$.

2 Écriture matricielle

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

4. Montrer que la relation (1) est équivalente à

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad U_{n+1} = AU_n \tag{2}$$

où A est une matrice carrée d'ordre 2 à déterminer.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$$

(se trouve facilement si on imagine le produit AU_n : on se voit donc répondre aux questions « quoi fois u_n + quoi fois u_{n+1} = u_{n+1}, quoi fois u_n + quoi fois u_{n+1} = u_{n+2} »). On vient de faire une chose simple et importante : remplacer une récurrence d'ordre 2 en dimension 1 par une récurrence d'ordre 1 en dimension 2. L'intérêt est immédiatement visible puisqu'on trouve ci-dessous une formule :

5. Si (2) est vérifiée, exprimer U_n en fonction de A et U_0.

$$U_n = A^n U_0$$

(récurrence sur n).

3 Étude dans le cas de diagonalisabilité

6. Démontrer que A est diagonalisable si et seulement si l'équation (E) $r^2 = ar + b$ admet deux racines distinctes.

Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A = X^2 - aX - b$$

S'il a deux racines distinctes, A est diagonalisable (condition suffisante de diagonalisabilité). Mais s'il n'a pas deux racines distinctes, cela signifie qu'il n'a pas de racine (alors A n'est même pas trigonalisable) ou qu'il en a une unique (alors A pour être diagonalisable doit être une homothétie, ce qu'elle n'est visiblement pas vu le 1 en haut à droite).

On suppose que c'est le cas, et on note r_1 et r_2 les deux racines de (E).

7. Montrer que les solutions sont les suites de terme général de la forme $u_n = Ar_1^n + Br_2^n$ où $A, B \in \mathbb{K}$.

Ecrivons $A = PDP^{-1}$ avec $P \in GL_2(\mathbf{K})$ et

$$D = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$$

Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $A = PD^nP^{-1}$ avec

$$D^n = \begin{pmatrix} r_1^n & 0 \\ 0 & r_2^n \end{pmatrix}$$

Or

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad U_n = PD^nP^{-1}U_0$$

Lisant la première ligne de ce produit matriciel, on obtient l'existence de α et β tels que

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n\ .$$

Notons $e = \left(r_1^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$, $f = \left(r_2^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$. On vient de montrer

$$F \subset \text{Vect}(e, f)$$

Or $\dim(F) = 2$, on en déduit que nécessairement (e, f) est libre et $F = \text{Vect}(e, f)$. Ce qui conclut.

8. **Application** : terme général et équivalent de la suite de Fibonacci.

   L'équation caractéristique est $r^2 - r - 1 = 0$ qui a deux racines distinctes, $\tau = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\sigma = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
   Il existe donc α et β tels que
   $$\forall n \in \mathbf{N} \qquad u_n = \alpha\tau^n + \beta\sigma^n$$
   On détermine τ et σ par les conditions $u_0 = u_1 = 1$, on trouve (mais ce n'est pas la seule manière de l'exprimer)
   $$\forall n \in \mathbf{N} \qquad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\tau^{n+1} - \sigma^{n+1}\right)$$
   Mais $|\sigma| < |\tau|$, donc
   $$\sigma^n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\tau^n\right)$$
   On a donc
   $$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\tau^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

4 Étude dans le cas de trigonalisabilité

On suppose ici que (E) $r^2 - ar - b = 0$ admet une racine double r_0.

9. Dans quel cas cette racine est-elle nulle ?

   On écarte le cas inintéressant $r_0 = 0$, ce qui signifie que $a = b = 0$, F est alors l'ensemble des suites nulles à partir du rang 2.

   On suppose désormais ne pas être dans ce cas.

10. Démontrer que A est trigonalisable puis que les solutions sont les suites de terme général de la forme $u_n = (A + nB)r_0^n$ où $A, B \in \mathbb{K}$.

    A est trigonalisable car son polynôme caractéristique χ_A est scindé, A est non diagonalisable car elle n'est pas de la forme $r_0 I_2$.
    On a donc $A = PTP^{-1}$ avec $P \in GL_2(\mathbf{K})$ et
    $$T = \begin{pmatrix} r_0 & \mu \\ 0 & r_0 \end{pmatrix}$$
    avec $\mu \neq 0$. On cherche une base pour laquelle $\mu = 1$.
    Soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbf{K}^2$, $u \in L(\mathbf{K}^2)$ canoniquement associé à T. Alors
    $$u(e_1) = r_0 e_1 \qquad , \qquad u(e_2) = r_0 e_2 + \mu e_1$$
    Donc
    $$\mathrm{Mat}_{(\mu e_1, e_2)}(u) = \begin{pmatrix} r_0 & 1 \\ 0 & r_0 \end{pmatrix}$$
    (et évidemment on remarque bien que $(\mu e_1, e_2)$ est une base de $\mathbf{K}^2$). On a donc montré que T, donc A, est semblable à
    $$T' = \begin{pmatrix} r_0 & 1 \\ 0 & r_0 \end{pmatrix}$$
    On a donc $A = P'T'P'^{-1}$ avec $P' \in GL_2(\mathbf{K})$ et
    $$T' = \begin{pmatrix} r_0 & 1 \\ 0 & r_0 \end{pmatrix}$$

Donc, par récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$T'^n = \begin{pmatrix} r_0^n & n r_0^{n-1} \\ 0 & r_0^n \end{pmatrix}$$

(la formule se trouve assez facilement en calculant T^2, éventuellement T^3, et la récurrence est très simple). Or

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad U_n = P' T'^n P'^{-1} U_0$$

Lisant la première ligne de ce produit matriciel, on obtient l'existence de α et β tels que

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad u_n = (\alpha n + \beta) r_0^n \ .$$

Notons $e = \left(r_0^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$, $f = \left(n r_0^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$. On vient de montrer

$$F \subset \mathrm{Vect}(e, f)$$

Or $\dim(F) = 2$, on en déduit que nécessairement (e, f) est libre et $F = \mathrm{Vect}(e, f)$. Ce qui conclut.

11. **Application** : terme général de la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.
L'équation caractéristique est
$$r^2 - 2r + 1 = 0$$
de racine double 1. Il existe donc α et β tels que
$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad u_n = \alpha + n\beta$$
on trouve, avec u_0 et u_1, $u_n = 1 - 2n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

5 Étude spécifique du cas réel

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il est possible que (E) n'ait aucune racine réelle. Plaçons-nous dans ce cas.
L'équation caractéristique a alors deux racines complexes conjuguées $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

12. Montrer qu'alors les deux suites de termes généraux $u_n = r^n \cos(n\theta)$ et $v_n = r^n \sin(n\theta)$ forment une base de l'espace F des solutions.
Toute suite complexe qui vérifie (1) est combinaison linéaire (à coefficients complexes) des suites $\left(r^n e^{in\theta}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ et $\left(r^n e^{-in\theta}\right)_{n\in\mathbf{N}}$. Donc combinaison linéaire (à coefficients complexes) des suites u et v de termes généraux $u_n = r^n \cos n\theta$ et $v_n = r^n \sin n\theta$. Ces deux suites forment donc une famille libre d'éléments de F et sont deux suites réelles, d'où le résultat.
Les solutions sont donc les suites de terme général $u_n = (A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))r^n$ pour $A, B \in \mathbb{R}$.

13. **Application** : terme général de la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$.
Les racines de l'équation caractéristique sont $j = e^{2i\pi/3}$ et $j^2 = \overline{j}$. Il existe donc α et β telles que
$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad u_n = \alpha\cos(2n\pi/3) + \beta\sin(2n\pi/3)$$
Avec les conditions initiales, on trouve
$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad u_n = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(2n\pi/3)$$
On note donc que u est 3-périodique, et effectivement on peut en partant de la récurrence de départ obtenir $u_{n+3} = u_n$.

6 Exercices

Déterminer les suites réelles vérifiant

14. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
Equation caractéristique : $r^2 - 5r + 6 = 0$, racines 2 et 3. Il existe a et b tels que
$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad u_n = a \times 2^n + b \times 3^n$$
On a $a + b = 1$, $2a + 3b = 2$, on en déduit $b = 0$, $a = 1$, $\forall n \in \mathbf{N} \quad u_n = 2^n$

15. (u_n) est bornée et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
L'équation caractéristique est celle de Fibonacci. Avec les notations du **4.**, il existe donc α et β tels que
$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad u_n = \alpha\tau^n + \beta\sigma^n$$
Si $\alpha \neq 0$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha\tau^n$ et u ne peut être bornée (car $|\tau| > 1$). Si $\alpha = 0$, non seulement u est bornée, mais elle converge vers 0, car $|\sigma < 1$.

16. $u_0 > 0$, $u_1 > 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = \sqrt[3]{u_{n+1}u_n^2}$.
Par récurrence, on vérifie que tous les termes d'une telle suite sont strictement positifs et les racine, exposant, produit nous incitent à prendre le $\ln$. La suite $(v_n)_n = (\ln u_n)_n$ vérifie $v_0, v_1 \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ v_{n+2} = \dfrac{v_{n+1}}{3} + \dfrac{2v_n}{3}$.
L'équation caractéristique est $3r^2 - r - 2 = 0$ et admet comme racines 1 et $-2/3$.
Les solutions sont donc les suites v telles qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ v_n = a + b\left(-\frac{2}{3}\right)^n$$
et donc en revenant au problème initial, les solutions sont les suites u telle qu'il existe $K \in \mathbb{R}_*^+$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n = K\mathrm{e}^{b\left(-\frac{2}{3}\right)^n}$$

17. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. À quelle condition sur le réel α existe-t-il des suites réelles non nulles telles que $u_0 = u_p = 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = 2\cos\alpha\ u_{n+1} - u_n$?
L'équation caractéristique est
$$r^2 - 2\cos\alpha\ r + 1 = 0$$
dont le discriminant « réduit » est $-\sin^2\alpha$.
Si $\alpha \equiv 0\ [2\pi]$, l'équation caractéristique est $(r-1)^2 = 0$. Il existe donc a et b tels que
$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad u_n = an + b$$
Et $u_0 = u_p = 0$ donne $a = b = 0$.
Si $\alpha \equiv \pi\ [2\pi]$, l'équation caractéristique est $(r+1)^2 = 0$. Il existe donc a et b tels que
$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad u_n = (-1)^n(an + b)$$
Et $u_0 = u_p = 0$ donne $a = b = 0$.
Supposons maintenant $\alpha \not\equiv 0[\pi]$; l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées $\cos\alpha \pm i\sin\alpha$, i.e. $e^{i\alpha}$ et $e^{-i\alpha}$. Il existe donc a et b tels que
$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad u_n = a\cos(n\alpha) + b\sin(n\alpha)$$
La condition $u_0 = 0$ donne $a = 0$, la condition $b\sin(p\alpha) = 0$ donne alors $b = 0$, sauf si $\sin(p\alpha) = 0$, auquel cas il n'y a aucune condition sur b, et donc il y a des suites réelles non nulles satisfaisant au problème. La condition cherchée est donc $\sin(p\alpha) = 0$ et $\sin\alpha \neq 0$, i.e.
$$\alpha \in \left\{\frac{k\pi}{p}\ ;\ k \in \mathbf{Z}\,, k \not\equiv 0[p]\right\}$$

7 Utilisation des polynômes d'endomorphisme

On considère l'endomorphisme $\Delta : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ u & \longmapsto & (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$.

18. Déterminer un polynôme P tel que $F = \mathrm{Ker}(P(\Delta)$.

$$u \in F \iff \Delta^2 u = a\Delta u + bu$$

Donc $P = X^2 - aX - b$ convient (quelle coïncidence !)

19. On suppose que P a deux racines distinctes : retrouver le résultat du **3.** en appliquant le lemme de décomposition des noyaux.

Ici, $P = (X - r - 1)(X - r_2)$ avec $X - r_1 \wedge X - r_2 = 1$ (car $r_1 \neq r_2$). Donc, par théorème des noyaux,

$$F = \mathrm{Ker}\big(\Delta - r_1 \mathrm{Id}\big) \bigoplus \mathrm{Ker}\big(\Delta - r_2 \mathrm{Id}\big)$$

Or $\mathrm{Ker}\big(\Delta - r\mathrm{Id}\big)$ est facile à déterminer :

$$u \in \mathrm{Ker}\big(\Delta - r\mathrm{Id}\big) \iff \Delta u = ru \iff \forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+1} = r u_n$$

Donc $\mathrm{Ker}\big(\Delta - r\mathrm{Id}\big)$ est la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(e)$ engendrée par $e = (r_1^n)_{n\in\mathbf{N}}$. On retrouve alors facilement la description de F obtenue en **3.**

20. On suppose que P a une racine double : peut-on retrouver le résultat du **4.** ?

Ici, $P = (X - r_0)^2$. Donc

$$u \in F \iff (\Delta - r_0\mathrm{Id})^2 u = 0 \iff (\Delta - r_0\mathrm{Id})u \in \mathrm{Ker}\big(\Delta - r_0\mathrm{Id}\big)$$

Cette condition équivaut donc (on connaît $\mathrm{Ker}\big(\Delta - r_0\mathrm{Id}\big)$) à l'existence de α tel que

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad u_{n+1} - r_0 u_n = \alpha r_0^n$$

qui donne $u_1 = r_0 u_0 + \alpha$, $u_2 = r_0^2 u_0 + 2r_0\alpha$, $u_3 = r_0^3 u_0 + 3r_0^2\alpha$ et facilement par récurrence

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad u_n = r_0^n u_0 + n r_0^{n-1}\alpha$$

ce qui permet effectivement de retrouver la formule de **4.**

III EXTENSION

Soit $p \geqslant 2$, $a_0, \dots, a_{p-1} \in \mathbb{K}$ et F l'ensemble des suites u telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \cdots + a_0 u_n. \tag{1}$$

21. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Quelle est la dimension de F ?

La dimension vaut p ; même justification que pour $p = 2$, L'application

$$\phi : \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbf{K}^p \\ u & \longmapsto & (u_0, u_1, \dots, u_{p-1}) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme par principe de récurrence.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix}$.

22. Montrer que la relation (1) est équivalente à

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad U_{n+1} = AU_n \tag{2}$$

où A est une matrice carrée d'ordre p à déterminer.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_p \end{pmatrix}$$

23. Calculer son polynôme caractéristique. Conclusion ?
A est une matrice compagne, de polynôme caractéristique $X^p - a_1 X^{p-1} - \ldots - a_p$ (calcul classique quoique non évident). On retrouve l'« équation caractéristique »

$$r^p - a_1 r^{p-1} - \ldots - a_p = 0$$

dont les solutions sont les raisons des suites géométriques vérifiant la relation de récurrence. Si (et seulement si) ses racines sont toutes simples, A est diagonalisable, sinon ce n'est pas le cas... et on peut faire le même traitement que pour $p = 2$, plus compliqué car il y peut y avoir des racines de multiplicités variées.