Dénombrabilité, familles sommables

- Les exercices de dénombrabilité sont rarement simples et tombent rarement à l'oral (sauf pour les concours les plus ambitieux).
  - ⋆ Pour montrer une dénombrabilité, on peut exhiber une bijection avec un autre ensemble dénombrable mais c'est rarement aussi direct. On peut aussi utiliser les propriétés de conservation : produit cartésien, réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables (qui donnent des ensembles finis ou dénombrables).
  - ⋆ Pour montrer une non dénombrabilité, on peut montrer qu'on est en bijection avec un ensemble non dénombrable connu. Il est aussi d'usage courant d'utiliser un argument type argument diagonal de Cantor (voir la non dénombrabilité de $]0,1[$ donc de $\mathbb{R}$ – au programme, preuve non exigible – dans le cours ou celle de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ – hors programme).
- Pour montrer qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ de réels positifs est sommable, on peut
  - ⋆ montrer que toutes les sommes de sous familles finies de $(u_i)_{i\in I}$ sont majorées,
  - ⋆ par paquets : montrer qu'il existe une « partition » dénombrable de I telle que chaque sous-famille indexée par un élément de la partition soit sommable et sa somme est le terme général d'une série convergente (et alors la somme de la famille sommable est la somme de cette série),
  - ⋆ si $I=\mathbb{N}$, montrer que la série $\sum u_i$ converge.
- Pour montrer qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ de réels quelconques ou de complexes est sommable, on peut
  - ⋆ montrer que toutes la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable,
  - ⋆ par paquets : montrer qu'il existe une « partition » dénombrable de I telle que chaque sous-famille indexée par un élément de la partition soit sommable et la somme des modules des éléments de cette sous-famille est le terme général d'une série convergente (et alors la somme de la famille sommable est la somme de cette série),
  - ⋆ si $I=\mathbb{N}$, montrer que la série $\sum u_i$ converge absolument.
- Pour calculer la somme d'une famille sommable...
  - ⋆ ... de réels : on peut séparer les termes positifs et les termes négatifs,
  - ⋆ ... de complexes : on peut séparer partie réelle et partie imaginaire,
  - ⋆ en général, on peut utiliser le théorème de sommation par paquets.
- Pour montrer qu'une série de nombres complexes est absolument convergente, on peut reconnaître un produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.
- En particulier, pour montrer qu'une somme double de réels positifs converge et calculer sa somme, on montre qu'en fixant un indice, on obtient une série convergente et que la série des sommes converge : la somme double est alors la somme de cette série (Fubini).
- Pour montrer qu'une somme double $(a_{m,n})$ de complexes converge, on applique le résultat précédent à $(|a_{m,n}|)$.

Vrai ou faux

1. Toute partie de $\mathbb{N}$ qui n'est pas en bijection avec $\mathbb{N}$ est finie.
2. $\mathbb{Q}^2$ est dénombrable.
3. $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$ n'est pas dénombrable.
4. $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum z_n$ est absolument convergente.
5. Si une série converge, toute série obtenue en permutant ses termes converge.

1. Dénombrabilité

1 Montrer que $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ (suites presque nulles, donc nulle à partir d'un certain rang) est dénombrable mais pas $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

2 L'ensemble des nombres complexes de module 1 est-il dénombrable ?

L'ensemble des racines de l'unité (i.e. l'ensemble des z dans $\mathbb{C}$ tels qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ vérifiant $z^n=1$) l'est-il ?

3 On dit qu'un nombre complexe est algébrique lorsqu'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients entiers. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

Il y a donc beaucoup de nombres transcendants.

Indication : on pourra commencer par s'intéresser à des polynômes « pas trop gros ».

4 Montrer que l'ensemble des extractrices n'est pas dénombrable.

Peut-on dire que l'ensemble des suites extraites d'une suite donnée n'est jamais dénombrable ?

2. Familles sommables

5 Montrer que la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de réels positifs est sommable si et seulement si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_{-n}$ le sont et, lorsque c'est le cas, $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} u_n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_{-n}$.

6 Montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{m^2n^2}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable et, en utilisant $\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4)=\dfrac{\pi^4}{90}$, calculer les sommes

1. $\displaystyle\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{1}{m^2n^2}$
2. $\displaystyle\sum_{\substack{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2\\ m|n}}\frac{1}{m^2n^2}$
3. $\displaystyle\sum_{\substack{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2\\ m\wedge n=1}}\frac{1}{m^2n^2}$

7 Pour quelles valeurs des nombres complexes a et b la famille $(a^m b^n)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est-elle sommable ? Calculer alors sa somme.

8 En utilisant la famille $\left(x^{n+p}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$, montrer que, si $|x|<1$, $\dfrac{1}{(1-x)^2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n$.

Résultat qui s'obtient plus naturellement par utilisation des séries entières.

9 Les familles suivantes sont-elles sommables sur $\mathbb{Z}$? Si oui, calculer leur somme.

1. $\left(\dfrac{n}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$
2. $\left(\dfrac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^3}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$
3. $\left(\dfrac{\mathrm{e}^{inx}}{2^{|n|}}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$
4. $\left(2^{n-2|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$

10 Démontrer que, si x est élément de $[0,1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1+x^n}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p x^{p+1}}{1-x^{p+1}}$$

11 Soit $a\in\mathbb{C}$ tel que $|a|<1$. Montrer l'identité $\dfrac{1}{(1-a)^2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a^n$.

12 Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{4^k}{k!}$.

1. (a) Écrire $\sum u_n$ comme le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.
   (b) En déduire que la série $\sum u_n$ converge et calculer sa somme.
2. Pour tout $(n,k)\in\mathbb{N}$, on note $a_{n,k}$ le réel valant $\dfrac{4^k}{2^n k!}$ si $k\leqslant n$ et 0 sinon.
   À l'aide du théorème de Fubini, montrer que $(a_{k,n})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et retrouver $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$.

13 **Mines**

Discuter, suivant les valeurs du réel α, la sommabilité de $\left(\dfrac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}_*^2}$ puis celle de $\left(\dfrac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}_*^2}$

On rappelle la définition de la fonction ζ, classique mais hors programme $\zeta(s)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$.

14 **Mines**

Démontrer que les deux séries $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2}\big(\zeta(k)-1\big)$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2}(-1)^k\big(\zeta(k)-1\big)$ convergent, et calculer leurs sommes.

15 Pour tout élément p de $\mathbb{N}^*$, on définit $J_p=\{(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*,\ mn=p\}$.

Utiliser la famille (J_p) pour démontrer $\big(\zeta(s)\big)^2=\displaystyle\sum_{p\geqslant 1}\frac{n_p}{p^s}$ où s est un réel strictement supérieur à 1, n_p désignant pour tout p le nombre de diviseurs de p.

16 Soit $s\geqslant 1$.

1. Montrer que la suite double $\left(2^{-sm}3^{-sn}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Calculer sa somme, que l'on notera S.
2. On suppose $s>1$. Montrer que $S<\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^s}$.
3. On suppose $s\geqslant 1$. Montrer que $S>\displaystyle\sum_{k=1}^{5-1}\frac{1}{k^s}$.
4. Montrer que la suite triple $\left(2^{-sn_1}3^{-sn_2}5^{-sn_3}\right)_{(n_1,n_2,n_3)\in\mathbb{N}^3}$ est sommable. Calculer sa somme, que l'on notera S_3.
5. On suppose $s>1$. Montrer que $S_3<\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^s}$.
6. On suppose $s\geqslant 1$. Montrer que $S_3>\displaystyle\sum_{k=1}^{7-1}\frac{1}{k^s}$.
7. Pour $s>1$, étendre les résultats précédents et justifier la formule $\displaystyle\prod_{p\in\mathcal{P}}\frac{1}{1-p^{-s}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$ où $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.
8. Pour $s=1$, étendre les résultats précédents et montrer que $\displaystyle\sum_{p\in\mathcal{P}}\frac{1}{p}=+\infty$.