

# Intégrales à paramètres

## Exercices vus en cours

### 1 Transformée de Fourier

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  intégrable. Montrer que la fonction  $\hat{f} : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t) dt$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

### 2 Transformée de Laplace

Soit  $f : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{K}$  intégrable.

1. Montrer que la fonction  $\mathcal{L}(f) : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

2. On suppose que  $f$  a une limite (finie) en  $+\infty$ .

Montrer que  $x\mathcal{L}(f)(x)$  a des limites en 0 et en  $+\infty$ , les calculer.

3. Utilisation pour le calcul de l'intégrale de Dirichlet

(a) Montrer que l'intégrale généralisée  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  converge.

(b) On définit, si  $x \geq 0$ ,  $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$ . Calculer la limite de  $F$  en  $+\infty$ .

(c) Montrer que  $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} F(0)$ , autrement dit que  $F$  est continue en 0.

On pourra utiliser la fonction  $g : x \rightarrow \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ .

(d) Montrer que  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et calculer  $F'$ .

(e) En déduire  $I$ .

### 3 CCINP 50

#### Solution de 3 : CCINP 50

1. Notons  $f : \begin{cases} ]0; +\infty[ \times ]0; +\infty[ & \mapsto \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto \frac{e^{-2t}}{x+t} \end{cases}$

(a)  $\forall x \in ]0; +\infty[, t \mapsto f(x, t)$  est continue par morceaux sur  $]0; +\infty[$ .

(b)  $\forall t \in ]0; +\infty[, x \mapsto f(x, t) = \frac{e^{-2t}}{x+t}$  est continue sur  $]0; +\infty[$ .

(c) Soit  $[a, b]$  un segment de  $]0; +\infty[$ .

$\forall x \in [a, b], \forall t \in ]0; +\infty[, |f(x, t)| \leq \frac{1}{a} e^{-2t}$  et  $\varphi : t \mapsto \frac{1}{a} e^{-2t}$  est continue par morceaux, positive et intégrable sur  $]0; +\infty[$ .

En effet,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \varphi(t) = 0$ , donc  $\varphi(t) = o_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{t^2} \right)$ .

Donc  $\varphi$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ , donc sur  $]0; +\infty[$ .

On en déduit que, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres,

$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{x+t} dt \text{ est définie et continue sur } ]0; +\infty[.$$

$$2. \forall x \in ]0; +\infty[, xF(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{x+t} e^{-2t} dt.$$

Posons  $\forall x \in ]0; +\infty[, \forall t \in [0; +\infty[, h_x(t) = \frac{x}{x+t} e^{-2t}$ .

i)  $\forall x \in ]0; +\infty[, t \mapsto h_x(t)$  est continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$ .

ii)  $\forall t \in [0; +\infty[, \lim_{x \rightarrow +\infty} h_x(t) = e^{-2t}$ .

La fonction  $h : t \mapsto e^{-2t}$  est continue par morceaux sur  $[0; +\infty[$ .

iii)  $\forall x \in ]0; +\infty[, \forall t \in [0; +\infty[, |h_x(t)| \leq e^{-2t}$  et  $t \mapsto e^{-2t}$  est continue par morceaux, positive et intégrable sur  $[0; +\infty[$ .

Donc, d'après l'extension du théorème de convergence dominée à  $(h_x)_{x \in ]0; +\infty[}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} h_x(t) dt = \int_0^{+\infty} h(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2}.$$

Conclusion :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) = \frac{1}{2}$ .

$$3. \text{ D'après 2., } \lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) = \frac{1}{2}, \text{ donc } F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.$$

Autre méthode : le CV  $u = x + t$  donne  $F(x) = e^{2x} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-2u}}{u} du$  ce qui redonne existence et continuité.

Puis, la dérivée de  $u \mapsto \frac{e^{-2u}}{u}$  valant  $u \mapsto -\frac{2u+1}{u^2} e^{-2u}$ , on «remarque» que  $\frac{e^{-2u}}{u} \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2u+1}{2u^2} e^{-2u}$ , donc par intégration des équivalents de fonctions positives dans le cas de convergence,

$$F(x) \sim e^{2x} \int_x^{+\infty} \frac{2u+1}{2u^2} e^{-2u} du = e^{2x} \left[ -\frac{e^{-2u}}{2u} \right]_x^{+\infty} = \frac{1}{2x}.$$

D'où en particulier  $xF(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$ .

## 4 CCINP 30

### Solution de 4 : CCINP 30

1. Voir ci-dessus.

2. On pose  $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[, u(x, t) = e^{-t^2} \cos(xt)$ .

i)  $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto u(x, t)$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .

De plus,  $\forall x \in \mathbb{R}, |u(x, t)| \leq e^{-t^2}$ .

Or  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$ , donc, au voisinage de  $+\infty$ ,  $e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ .

Donc,  $t \mapsto u(x, t)$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

ii)  $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[, \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -te^{-t^2} \sin(xt)$ .

-  $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $[0, +\infty[$ .

-  $\forall t \in [0, +\infty[, x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

-iii)  $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[, \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right| \leq te^{-t^2} = \varphi(t)$  avec  $\varphi$  continue par morceaux, positive et

intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

En effet,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \varphi(t) = 0$  donc, au voisinage de  $+\infty$ ,  $\varphi(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ .

On en déduit que  $\varphi$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  et comme elle est continue sur  $[0, 1[$ , alors  $\varphi$  est bien intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

Donc  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-t^2} \sin(xt) dt$$

3. (a) On a,  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-t^2} \sin(xt) dt$ .

Procédons à une intégration par parties. Soit  $A \geq 0$ .

$$\int_0^A -te^{-t^2} \sin(xt) dt = \left[ \frac{1}{2} e^{-t^2} \sin(xt) \right]_0^A - \int_0^A \frac{x}{2} e^{-t^2} \cos(xt) dt$$

En passant à la limite quand  $A \rightarrow +\infty$ , on obtient  $f'(x) + \frac{x}{2} f(x) = 0$ .

Donc  $f$  est solution de l'équation différentielle (E) :  $y' + \frac{x}{2} y = 0$ .

(b) Les solutions de (E) sont les fonctions  $y$  définies par  $y(x) = Ae^{-\frac{x^2}{4}}$ , avec  $A \in \mathbb{R}$ .

**5** La fonction  $\Gamma$  On définit  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ .

- Déterminer l'ensemble de définition de  $\Gamma$ .
- Montrer que pour tout  $x > 0$ ,  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ . Que vaut  $\Gamma(n)$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  ?
- Montrer que  $\Gamma$  est continue sur son ensemble de définition.
- Montrer que  $\Gamma$  est même de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et exprimer ses dérivées sous forme intégrale.
- Montrer que  $\Gamma$  est une fonction convexe.
- Montrer, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur  $[a, b]$ , que  $(\Gamma')^2 \leq \Gamma\Gamma''$  et en déduire que  $\Gamma$  est ln-convexe.
- Montrer que  $\Gamma'$  s'annule en un  $x_0 \in ]1, 2[$  et nulle part ailleurs.  
On trouve numériquement que  $x_0 \approx 0,89$  et  $\Gamma(x_0) \approx 1,46$ .
- Montrer que  $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$  au voisinage de  $0^+$  et en déduire sa limite.
- Déterminer la limite en  $+\infty$  de  $\Gamma$ .
- Tracer son graphe.

Voir aussi **CCINP 29**.

### Solution de 5 : La fonction $\Gamma$

- En effet, la fonction  $f_x : t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$  est continue (par morceaux suffirait) sur  $]0, +\infty[$ , positive (utile pour avoir le droit d'utiliser des équivalents).
  - Intégrabilité sur  $[1, +\infty[$  : par croissances comparées,  $e^{-t} t^{x-1} = o_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{t^2} \right)$ . On conclut donc par comparaison à une intégrale de Riemann. Ici, pas de condition sur  $x$ .
  - Intégrabilité sur  $]0, 1[$  :  $e^{-t} t^{x-1} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1}$ . Or (Riemann encore, mais pas au même endroit),  $t \mapsto t^{x-1}$  est intégrable sur  $]0, 1[$  si et seulement si  $x - 1 > -1$ , i.e.  $x > 0$ .

2. Par intégration par parties, si  $0 < a < A$ ,

$$\int_a^A e^{-t} t^{x-1} dt = \left[ e^{-t} \frac{t^x}{x} \right]_{t=a}^{t=A} + \frac{1}{x} \int_a^A e^{-t} t^x dt \quad (1)$$

Mais, par croissances comparées,

$$e^{-A} \frac{A^x}{x} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$$

et de plus

$$e^{-a} \frac{a^x}{x} \xrightarrow{a \rightarrow 0} 0$$

On en déduit, en prenant les limites quand  $a \rightarrow 0$  et  $A \rightarrow +\infty$  dans (1),

$$\Gamma(x) = 0 + \frac{1}{x} \Gamma(x+1)$$

Comme  $\Gamma(1) = 1$ , pour tout  $n \geq 1$ ,  $\Gamma(n) = (n-1)!$ .

3. On définit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_*^+ \times ]0, +\infty[ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto e^{-t} t^{x-1} \end{cases}$$

Et on constate facilement que

- Pour tout  $x > 0$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est continue (continue par morceaux suffirait) sur  $]0, +\infty[$ .
- Pour tout  $t > 0$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}_*^+$ .

**Domination** La domination, pour la continuité de  $\Gamma$ , est à la fois un peu technique et très importante.

Soit  $K = [a, b]$ ,  $0 < a < b$ . On a

$$\forall (x, t) \in K \times ]0, +\infty[ \quad 0 \leq e^{-t} t^{x-1} \leq \begin{cases} e^{-t} t^{a-1} & \text{si } t \leq \\ e^{-t} t^{b-1} & \text{si } t > \end{cases}$$

Rien n'empêche une fonction « dominante » d'être définie par morceaux. Si on n'aime pas, on peut aussi bien dire :

$$\forall (x, t) \in K \times ]0, +\infty[ \quad e^{-t} t^{x-1} \leq e^{-t} (t^{a-1} + t^{b-1})$$

4. On reprend

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_*^+ \times ]0, +\infty[ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto e^{-t} t^{x-1} \end{cases}$$

Et on constate facilement que  $f$  est indéfiniment dérivable par rapport à sa première variable sur son domaine de définition, avec pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k} : (x, t) \longmapsto$$

En théorie, on peut ne dominer que la dernière dérivée partielle...mais il n'y en a pas! On domine donc toutes les dérivées partielles.

Soit  $k \in \mathbb{N}$  quelconque.

- Pour tout  $x > 0$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$  est continue (continue par morceaux suffirait) sur  $]0, +\infty[$ .
- Pour tout  $t > 0$ , la fonction  $x \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}_*^+$ .

**Domination :** Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Soit  $K = [a, b]$ ,  $0 < a < b$ . On a

$$\forall (x, t) \in K \times ]0, +\infty[ \quad \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \begin{cases} e^{-t} t^{a-1} & \text{si } t \leq \\ e^{-t} t^{b-1} & \text{si } t > \end{cases}$$

(il faut bien s'assurer que la fonction dominante est intégrable).

5. Facile.
6. Théorème de Rolle, puis croissance de  $\Gamma'$ .
7.  $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1) \rightarrow \Gamma(1) = 1$ .
8. La limite existe par monotonie et  $\Gamma(n) = (n-1)! \rightarrow +\infty$ .

## Autres exercices

**6** Soit  $f(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x dt$ . Étudier la définition de  $f$ , sa dérivabilité, puis la calculer.

### Solution de 6 :

On trouve le domaine de définition :  $] -1, +\infty[$ . Sur lequel  $f$  est de classe  $C^1$  (domination sur tout segment). Et on a

$$f'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$$

On primitive, en remarquant que  $f$  a pour limite 0 en  $+\infty$  (théorème de convergence dominée),

$$f(x) = \ln \left( 1 + \frac{1}{x+1} \right)$$

**7** Existence et calcul éventuel de  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin(tx)}{t} dt$ .

### Solution de 7 :

La fonction  $t \mapsto \frac{e^{-t} \sin(tx)}{t}$  est continue sur  $\mathbb{R}_*^+$ , prolongeable par continuité en 0 (elle a pour limite  $x$  en 0), seul se pose donc le problème de l'intégrabilité sur  $[1, +\infty[$ . Mais on a, par croissances comparées,

$$e^{-t} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{1}{t} \right)$$

donc,  $\sin$  étant bornée,

$$\left| \frac{e^{-t} \sin(tx)}{t} \right| = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{1}{t^2} \right)$$

ce qui prouve par comparaison à l'exemple de Riemann l'intégrabilité sur  $[1, +\infty[$  et, par suite, sur  $]0, +\infty[$ . L'intégrale est bien définie.

Définissons maintenant

$$h : \begin{cases} \mathbb{R} \times ]0, +\infty[ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto \frac{e^{-t} \sin(xt)}{t} \end{cases}$$

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la fonction  $h(x, \cdot) : t \mapsto h(x, t)$  est continue (par morceaux suffirait) sur  $]0, +\infty[$ , intégrable sur cet intervalle (vu lors de l'étude de l'existence de l'intégrale).
- $h$  est dérivable par rapport à sa première variable sur son domaine de définition, et

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times ]0, +\infty[ \quad \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = e^{-t} \cos(xt)$$

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}_*$ ,  $\frac{\partial h}{\partial x}(x, \cdot)$  est continue (par morceaux suffirait) sur  $]0, +\infty[$ , intégrable sur cet intervalle (c'est une conséquence des dominations ci-dessous mais on peut le voir rapidement : pas de problème en 0, et négligeable devant  $\frac{1}{t^2}$  au voisinage de  $+\infty$ ).

- Pour tout  $t \in [0, +\infty[$ , la fonction  $\frac{\partial h}{\partial x}(\cdot, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

- **Domination :** On a alors

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times ]0, +\infty[ \quad \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-t}$$

et  $\phi : t \mapsto e^{-t}$  est indépendante de  $x$ , continue (par morceaux suffirait), intégrable sur  $]0, +\infty[$  par comparaison à l'exemple de Riemann (pas de problème en 0, et négligeable devant  $\frac{1}{t^2}$  au voisinage de  $+\infty$ ).

En appliquant le théorème de dérivation sous le signe  $\int$ , on conclut :

l'application  $\phi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin(tx)}{t} dt$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ , et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \phi'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t} dt$$

on calcule facilement en interprétant comme partie réelle d'une intégrale facile à calculer, puis on primitive, et on utilise  $\phi(0) = 0$ .

**8 Oral Centrale** Définition, continuité et dérivabilités successives de  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$ .

### Solution de 8 : Oral Centrale

Le domaine de définition est  $\mathbb{R}_*^+$ . Le changement de variable  $u = x + t$ ,  $t = u - x$  permet de sortir  $x$  de l'intégrale. D'où assez facilement la classe  $C^\infty$ .

**9 Calcul de l'intégrale de Gauß** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f(x) = \left( \int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$  et  $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ .

1. Démontrer que  $f$  et  $g$  sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Démontrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$ .
3. Calculer  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ .

**10** **Oral Mines** On pose  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{x^2 + t^2} dt$ .

- Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
- Étudier sa continuité.
- Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$ .
- Déterminer les limites, puis des équivalents en 0 et en  $+\infty$  de  $f$ .

**Solution de 10 : Oral Mines**

La fonction  $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{x^2 + t^2}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ , se prolonge par continuité en 0 en lui donnant en général la valeur 0, sauf si  $x = 0$  (valeur 1/2). Comme elle est  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ , la comparaison avec les fonctions de Riemann donne l'intégrabilité. On définit sur  $\mathbb{R} \times ]0, +\infty[$  la fonction  $h$  par

$$h(x, t) = \frac{1 - \cos t}{x^2 + t^2}$$

est continue, et la domination

$$|h(x, t)| \leq \frac{1 - \cos t}{t^2}$$

montre bien la continuité. Pour la classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $h$  est dérivable par rapport à  $x$ , et pour tous  $(x, t) \in \mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ ,

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = \frac{-2x(1 - \cos t)}{(x^2 + t^2)^2}$$

est continue par rapport à chacune de ses variables, la domination

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times ]0, +\infty[ \quad \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{2b(1 - \cos t)}{(a^2 + t^2)^2}$$

(où  $0 < a < b$ ) montre la classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_*^+$ . Donc sur  $\mathbb{R}_*$  par parité. Il est possible de montrer que  $f$  n'est pas  $\mathcal{C}^1$  en montrant que  $f'$  a une limite infinie en 0. C'est un peu technique.

La limite en  $+\infty$  est nulle (convergence dominée). La limite en 0 est

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$$

(théorème de convergence dominée ou continuité). Et est donc un équivalent, car elle est non nulle. La recherche d'un équivalent en  $+\infty$  est plus délicate. On essaye de « faire sortir » de l'intégrale quelque chose qui tend vers 0, en effectuant une intégration par parties ou un changement de variable. Le changement de variable le plus naturel serait  $t = xu$  qui ferait sortir un  $1/x$  :

$$f(x) = \frac{1}{x} \left( \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xu)}{1 + u^2} du \right)$$

et une intégration par parties de l'intégrale figurant dans cette expression donne l'équivalent  $\frac{\pi}{2x}$ .

**11** **Oral Mines** Calculer  $f(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2 - iux} dx$  pour  $u \in \mathbb{R}$ .

On admet la valeur de l'intégrale de Gauß :  $f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$  (voir exercice 10.)

### Solution de 11 : Oral Mines

On étudie cette intégrale comme fonction de  $u$  :

$$f(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 - iux} dx$$

On voit qu'elle est  $C^1$  assez facilement (c'est une transformée de Fourier, les dominations sont donc faciles). Par intégration par parties, on trouve une relation entre  $f'(u)$  et  $f(u)$  : en effet, si on a bien trouvé

$$f'(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} -ix e^{-x^2 - iux} dx$$

on peut se servir du  $x$  pour intégrer par parties, en primitivant  $x e^{-x^2}$  et en dérivant  $e^{-iux}$  :

$$f'(u) = -i \left( \left[ \frac{-1}{2} e^{-x^2} e^{-iux} \right]_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow +\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-1}{2} e^{-x^2} (-iu) e^{-iux} du \right)$$

ce qui donne

$$f'(u) = -\frac{u}{2} f(u)$$

On en déduit l'existence d'une constante  $K$  telle que

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad f(u) = K \exp(-u^2/4)$$

Mais on « sait » :

$$K = f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

**12** Oral Centrale ; Mines Soit  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} dt$ .

1. Domaine de définition ?
2. La fonction  $f$  est-elle de classe  $C^1$  ?
3. Calculer la dérivée de  $f$ , puis  $f$ .
4. Calculer  $\int_0^{+\infty} \left( \frac{\text{Arctan } t}{t} \right)^2 dt$ .

### Solution de 12 : Oral Centrale ; Mines

Le domaine de définition est  $\mathbb{R}$ , la fonction  $t \mapsto \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$  se prolongeant par continuité à  $[0, +\infty[$

et étant  $\mathcal{O}_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{t^3} \right)$ , or  $3 > 1$ ... Définissons, sur  $\mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ ,

$$h : (x, t) \mapsto \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$$

$h$  est dérivable par rapport à sa première variable sur son domaine de définition, et

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times ]0, +\infty[ \quad \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{1}{(1+x^2 t^2)(1+t^2)} \leq \frac{1}{1+t^2}$$

qui constitue une domination irréprochable. On ne s'attarde pas sur les hypothèses autres que la domination, elles sont faciles à vérifier. On aboutit au fait que  $f$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ , sa dérivée valant en tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2 t^2)(1+t^2)} dt$$

que l'on calcule en décomposant en éléments simples, supposant  $x \notin \{-1, 0, 1\}$ . On cherche  $a, b, c, d$  tels que

$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{at+b}{1+x^2t^2} + \frac{ct+d}{1+t^2}$$

La parité nous montre d'abord que  $a = c = 0$ . On réduit au même dénominateur, on voit que  $b + d = 1$  et  $b + dx^2 = 0$ , d'où les valeurs de  $b$  et  $d$  et la décomposition

$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{x^2}{x^2-1} \frac{1}{1+x^2t^2} - \frac{1}{x^2-1} \frac{1}{1+t^2}$$

Il faut alors éviter de se tromper avec le signe de  $x$ ...supposons donc  $x > 0$  et  $x \neq 1$  dorénavant. Alors

$$f'(x) = \left( \frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{x^2-1} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2(x+1)}$$

Cette valeur est encore valable pour  $x = 1$  car  $f'$  est continue. Compte tenu de  $f(0) = 0$  on obtient

$$\forall x \geq 0 \quad f(x) = \frac{\pi}{2} \ln(x+1)$$

et pour  $x < 0$ , par imparité, on trouve  $-f(-x)$ ...L'intégrale demandée se calcule par parties pour se ramener à  $f(1)$ .

**13** **Oral Centrale** Calculer, pour  $x$  réel,  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} e^{-t} dt$

(on étudiera la classe de  $f$ , et on essaiera de la dériver deux fois sur un intervalle).

### Solution de 13 : Oral Centrale

Il est prudent de commencer par étudier l'existence, qui ne pose pas trop de problèmes. On montre ensuite que  $f$  est de classe  $C^2$  (domination facile). Sa dérivée seconde se calcule sans grande difficulté : on trouve

$$f''(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Mais  $f(0) = f'(0) = 0$ , une double primitivation donne alors

$$f(x) = x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

### 14 Injectivité de la transformation de Laplace

Soit  $f$  une application continue  $[0, +\infty[$ , à valeurs réelles ou complexes. On suppose qu'il existe un réel strictement positif  $x_0$  vérifiant  $e^{-x_0 t} f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ .

1. Démontrer que, si  $x > x_0$ , l'application  $t \mapsto e^{-xt} f(t)$  est intégrable sur  $]x_0, +\infty[$ .

On note  $\mathcal{L}(f)$  la fonction définie sur  $]x_0, +\infty[$  par  $\mathcal{L}(f) : s \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$ .

2. Démontrer que  $\mathcal{L}(f)$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]x_0, +\infty[$ .

3. On suppose que  $\mathcal{L}(f)$  est la fonction nulle.

(a) Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\int_0^{+\infty} e^{-nt - (x_0+1)t} f(t) dt = 0$ .

(b) Soit alors  $g$  définie sur  $]0, 1]$  par  $g(u) = u^{x_0} f(-\ln u)$ .

Démontrer que  $g$  se prolonge en une fonction continue sur  $[0, 1]$ , et que pour tout entier naturel  $n$ ,  $\int_0^1 u^n g(u) du = 0$ .

(c) En déduire que  $g$ , et donc  $f$ , est la fonction nulle.

*Classique : utiliser le théorème de Weierstrass.*

**15**

**Convolution « temporelle »** Soit  $f$  et  $g$  deux applications continues sur  $\mathbb{R}^+$ . On définit leur

produit de convolution  $f \star g = \int_0^x f(t)g(x-t)dt$ . Démontrer que  $f \star g$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ , et que  $f \star g = g \star f$ .

*Indication : commencer par un changement de variable pour se ramener à une intégrale sur le segment  $[0, 1]$ .*

**Solution de 15 : Convolution « temporelle »**

Aucun problème de définition ; le changement de variable  $t = x - u$ ,  $u = x - t$  donne la commutativité. Pour la continuité, comme la variable figure à la fois dans une borne et à l'intérieur de l'intégrale, comme il n'est pas possible de la faire sortir de l'intégrale, on la fait au contraire rentrer en effectuant le changement de variable  $t = xu$ , qui donne

$$(f \star g)(x) = x \int_0^1 f(xu)g(x(1-u))du$$

Ensuite, le théorème de continuité sous le signe  $\int$ , avec une domination sur tout segment (on ne peut pas faire mieux) : si  $K$  est un segment inclus dans  $\mathbb{R}^+$ , soit  $M \geq 0$  tel que  $K \subset [0, M]$  ; en définissant  $h$  sur  $\mathbb{R}^+ \times [0, 1]$  par

$$h(x, t) = f(xu)g(x(1-u))$$

on a

$$\forall (x, t) \in K \times [0, 1] \quad |h(x, t)| \leq N_\infty(f|_{[0, M]})N_\infty(g|_{[0, M]})$$

qui constitue une domination valable, une fonction constante étant intégrable sur  $[0, 1]$ .

**16**

**Un nouveau calcul de l'intégrale de Dirichlet** On pose, pour  $x \geq 0$ ,  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$

et  $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt$ .

1. Vérifier que ces deux intégrales sont bien définies.
2. Écrire  $g(x)$  sous la forme  $\phi(x) \cos x + \psi(x) \sin x$ , où  $\phi(x)$  et  $\psi(x)$  sont deux intégrales sur l'intervalle  $[x, +\infty[$ .
3. Étudier la continuité de  $f$  et de  $g$ .
4. Démontrer que  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, +\infty[$  et sont toutes les deux solutions de  $y'' + y = \frac{1}{x}$ .
5. Calculer  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ .

**Solution de 16 : Un nouveau calcul de l'intégrale de Dirichlet**

2. On trouve

$$g(x) = \cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$$

4. On a vu que  $f$  et  $g$  étaient continues sur  $[0, +\infty[$ .

**Montrons que  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}_*^+$  :**

Pour cela, on définit

$$h : \mathbb{R}_*^+ \times ]0, +\infty[ \mapsto \mathbb{R}, (x, t) \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$$

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}_*^+$ , la fonction  $h(x, \cdot) : t \mapsto h(x, t)$  est continue (par morceaux suffirait) sur  $]0, +\infty[$ , intégrable sur cet intervalle (vu lors de l'étude du domaine de définition de  $f$ ).
- $h$  est deux fois dérivable (davantage, même!) par rapport à sa première variable sur son domaine de définition, et

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}_*^+ \times ]0, +\infty[ \quad \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = \frac{-te^{-xt}}{1+t^2}, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) = \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}$$

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}_*^+$ , les fonctions  $\frac{\partial h}{\partial x}(x, \cdot)$  et  $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, \cdot)$  sont continues (par morceaux suffirait) sur  $]0, +\infty[$ , intégrables sur cet intervalle (c'est une conséquence des dominations ci-dessous).
- Pour tout  $t \in ]0, +\infty[$ , les fonctions  $\frac{\partial h}{\partial x}(\cdot, t)$  et  $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(\cdot, t)$  sont continues sur  $\mathbb{R}_*^+$ .
- **Domination :** Soit  $a, b$  tels que  $0 < a < b$  et  $S \subset [a, b]$ . Si  $k = 1$  ou  $k = 2$ , on peut majorer :

$$\forall (x, t) \in S \times ]0, +\infty[ \quad \left| \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \frac{t^k e^{-at}}{1+t^2}$$

et  $\phi_S : t \mapsto \frac{t^k e^{-at}}{1+t^2}$  est indépendante de  $x$ , continue (par morceaux suffirait), intégrable sur  $]0, +\infty[$  par comparaison à l'exemple de Riemann (en effet, par croissances comparées,  $\frac{te^{-at}}{1+t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ ).

En appliquant deux fois le théorème de dérivation sous le signe  $\int$ , on conclut :  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}_*^+$ , et

$$\forall x > 0 \quad f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} dt$$

d'où l'on tire facilement  $f''(x) + f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$  ( $x > 0$ ).

**Montrons que  $g$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}_*^+$  :**

On a vu que l'on pouvait écrire, sur  $\mathbb{R}_*^+$ ,

$$g(x) = \phi(x) \cos x + \psi(x) \sin x$$

où  $\phi$  et  $\psi$  sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_*^+$ , de dérivées  $\phi'(x) = -\frac{\sin x}{x}$  et  $\psi'(x) = \frac{\cos x}{x}$ . Donc  $g$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_*^+$ , et, pour tout  $x > 0$ ,

$$g'(x) = \cos x \phi'(x) - \sin x \phi(x) + \cos x \psi(x) + \sin x \psi'(x) = -\sin x \phi(x) + \cos x \psi(x)$$

ce qui permet de dire que  $g'$  est de classe  $C^1$ , donc  $g$  de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}_*^+$ , et, pour tout  $x > 0$ ,

$$g''(x) = -\sin x \phi'(x) - \cos x \phi(x) + \cos x \psi'(x) - \sin x \psi(x) = \frac{1}{x} - g(x)$$

d'où découle le résultat.

5. La fonction  $f - g$  est solution sur  $\mathbb{R}_*^+$  de l'équation  $y'' + y = 0$ , elle est donc de la forme  $t \mapsto a \cos t + b \sin t$  ou  $t \mapsto A \cos(t + \phi)$ . Mais on remarque que  $f$  a pour limite 0 en  $+\infty$ , par caractérisation séquentielle de la limite et théorème de convergence dominée, ou par simple majoration :

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$$

et de même, comme  $\phi$  et  $\psi$  ont des limites nulles en  $+\infty$ , c'est aussi le cas de  $g$ . Donc  $A = 0$  (on peut aussi dire qu'une fonction périodique ayant une limite en  $+\infty$  est constante), donc  $f = g$  sur  $\mathbb{R}_*^+$ . Par continuité en 0,  $f(0) = g(0)$ , et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$$

**17**

Démontrer la formule suivante, pour  $x > 1$ ,  $\zeta(x)\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt$ .

... Faire apparaître à droite  $\Gamma(x)$  et une série géométrique...