Limites et intégrales

1. Limites de suites d'intégrales

A. Exercices vu en cours

1 **Wallis** Démontrer que la suite de terme général $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t \mathrm{d}t$ converge, donner sa limite en appliquant un théorème puis en effectuant un découpage.

Solution de 1 : Wallis

Définissons

$$f_n : \left| \begin{array}{ccc}]0,\pi/2[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sin^n t \end{array} \right.$$

La suite (f_n) converge simplement vers $\widetilde{0}$. L'hypothèse de domination est facile à réaliser :

$$\forall n \geqslant 0 \quad \forall t \in]0,\pi/2[\qquad |\sin^n t| \leqslant 1$$

Or la fonction $t \longmapsto 1$ est indépendante de n, et intégrable sur $]0,\pi/2[$.
Les fonctions f_n et la fonction $\widetilde{0}$ sont continues par morceaux, on peut alors appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\int_0^{\pi/2} f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{\pi/2} 0 = 0$$

2 **Utilité de l'hypothèse de domination**

Définissons, sur $[0,1]$, f_n continue affine par morceaux nulle en 0 et sur $\left[\dfrac{1}{n+1}, 1\right]$, et prenant en $\dfrac{1}{n+1}$ la valeur $n+1$.

Étudier la convergence simple de (f_n) et la convergence de $\left(\displaystyle\int_{[0,1]} f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

3 **CCINP 25**

Solution de 3 : CCINP 25

1. $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n\mathrm{e}^{-t}}$ est définie et continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
   De plus, $\forall\, t \in [0,+\infty[$, $|f_n(t)| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$.
   Or $\varphi(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ et $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc φ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
   Donc, par critère de majoration pour les fonctions positives, f_n est intégrable sur $[1,+\infty[$.
   Or f_n est continue sur $[0,1]$ donc f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$.

2. i) La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction f définie par :
$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+t^2} & \text{si } t\in[0,1[\\ \dfrac{1}{2+\mathrm{e}^{-1}} & \text{si } t=1\\ 0 & \text{si } t\in\,]1,+\infty[\end{cases}$$
ii) Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux sur $[0,+\infty[$.
iii) $\forall t\in[0,+\infty[\,,|f_n(t)|\leqslant\varphi(t)$ avec φ intégrable sur $[0,+\infty[$.
Alors, d'après le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty}f_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t$.
Or $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}$.
Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\dfrac{\pi}{4}$.

4 CCINP 26

Solution de 4 : CCINP 26

Posons pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in[0,+\infty[$, $f_n(t)=\dfrac{1}{(1+t^2)^n}$.

1. $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[0,+\infty[$.
   De plus, $|f_n(t)|\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{t^{2n}}$.
   Or $n\geqslant1$, alors $t\longmapsto\dfrac{1}{t^{2n}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
   Donc, par règle d'équivalence pour les fonctions positives, f_n est intégrable sur $[1,+\infty[$.
   Or f_n est continue sur$[0,1]$, donc f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$.
2. (a) $\forall\, t\in[0,+\infty[$, $\dfrac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\leqslant\dfrac{1}{(1+t^2)^n}$ car $1+t^2\geqslant1$.
   En intégrant, on obtient : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $I_{n+1}\leqslant I_n$.
   Donc $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

   (b) Remarque : $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et clairement positive ce qui nous assure la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   Déterminons la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   i) $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
   ii) La suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant1}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\begin{cases}0 & si\ x>0\\ 1 & si\ x=0\end{cases}$.
   De plus, f est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
   iii) $\forall t\in[0,+\infty[\,,\forall n\in\mathbb{N}^*,|f_n(t)|\leqslant\dfrac{1}{1+t^2}=\varphi(t)$ avec φ intégrable sur $[0,+\infty[$.
   En effet φ est continue sur $[0,+\infty[$ et $\varphi(t)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{t^2}$. Comme $t\longmapsto\dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc φ est intégrable sur $[1,+\infty[$. Comme φ est continue sur $[0,1]$, donc φ est intégrable sur $[0,1]$ donc sur $[0,+\infty[$.
   Par le théorème de convergence dominée on obtient :
$$\lim_{n\to+\infty}I_n=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t=0$$

et la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a pour limite 0.

3. D'après les questions précédentes, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et converge vers 0.
Donc, par application du théorème spécial des séries alternées, on peut affirmer la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n I_n$.

5 CCINP 27

Solution de 5 : CCINP 27

1. Soit $x\in[0,1]$.
Si $x=0$, $f_n(0)=1$.
Si $x\in\,]0,1]$, pour n au voisinage de $+\infty$, $f_n(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2}\dfrac{1}{n^2}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=0$.
On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction f définie par :
$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in\,]0,1]\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$

2. Soit $a\in\,]0;1[$.
$\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\forall\, x\in[a,1]$, $|f_n(x)-f(x)|=f_n(x)\leqslant\dfrac{\mathrm{e}^{-a}}{1+n^2a^2}$ (majoration indépendante de x).
Donc $\sup\limits_{t\in[a,1]}|f_n(t)-f(t)|\leqslant\dfrac{\mathrm{e}^{-a}}{1+n^2a^2}$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-a}}{1+n^2a^2}=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{t\in[a,1]}|f_n(t)-f(t)|=0$
On en déduit que (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,1]$.

3. Les fonctions f_n étant continues sur $[0,1]$ et la limite simple f ne l'étant pas, on peut assurer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $[0,1]$.

4. i) Les fonctions f_n sont continues par morceaux sur $[0,1]$.
ii) (f_n) converge simplement vers f sur $[0,1]$, continue par morceaux sur $[0,1]$.
iii) De plus, $\forall x\in[0,1]\,,|f_n(x)|\leqslant\mathrm{e}^{-x}\leqslant 1=\varphi(x)$ avec $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur $[0,1]$.
D'après le théorème de convergence dominée, on peut donc affirmer que :
$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

6 Calcul de limite d'une transformée de Laplace

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t$ a une limite quand $x\to+\infty$; la calculer.

Solution de 6 : Calcul de limite d'une transformée de Laplace

Domination par $\dfrac{1}{1+t^2}$, limite nulle.

7 Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale

Soit f une fonction continue sur $[0,+\infty[$, ayant une limite (finie) en $+\infty$. On sait alors qu'elle est bornée. On définit, si $x>0$, $F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $xF(x)$ a des limites en 0 et en $+\infty$, les calculer.

Solution de 7 : Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale

Changement de variable $u=st$.

8 Utilisation pour le calcul d'une intégrale semi-convergente

Montrer que l'intégrale généralisée $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ converge.

On définit, si $x\geqslant 0$, $F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$.

Calculer la limite de F en $+\infty$.

Puis montrer que $F(x)\xrightarrow[x\to 0]{} F(0)$, autrement dit que F est continue en 0.

On pourra utiliser la fonction $g\colon x\to\displaystyle\int_0^{x}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ *et l'exercice précédent.*

9 CCINP 50

Solution de 9 : CCINP 50

1.
2. $\forall\, x\in\,]0;+\infty[$, $xF(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{x+t}\,\mathrm{e}^{-2\,t}\mathrm{d}t$.
   Posons $\forall\, x\in\,]0;+\infty[$, $\forall\, t\in[0;+\infty[$, $h_x(t)=\frac{x}{x+t}\,\mathrm{e}^{-2\,t}$.
   i) $\forall\, x\in\,]0;+\infty[$, $t\longmapsto h_x(t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
   ii) $\forall t\in[0;+\infty[$, $\lim\limits_{x\to+\infty} h_x(t)=e^{-2\,t}$.
   La fonction $h:t\mapsto e^{-2\,t}$ est continue par morceaux sur $[0;+\infty[$.
   iii) $\forall\, x\in\,]0;+\infty[$, $\forall t\in[0;+\infty[$, $|h_x(t)|\leqslant e^{-2\,t}$ et $t\mapsto e^{-2\,t}$ est continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0;+\infty[$.
   Donc, d'après l'extension du théorème de convergence dominée à $(h_x)_{x\in]0;+\infty[}$,
   $$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}h_x(t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}h(t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}e^{-2\,t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}.$$
   Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x)=\frac{1}{2}$.
3. D'après 2., $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x)=\frac{1}{2}$, donc $F(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2\,x}$.

B. Autres exercices

10 On pose $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{1+u^n}$ pour $n\in\mathbb{N}$. Démontrer que la suite (I_n) converge vers une limite ℓ, et trouver un équivalent de $I_n-\ell$.

Solution de 10 :

Par théorème de convergence dominée, fonction dominante : $\widetilde{1}$, on trouve une limite égale à 1. Ensuite, première technique : si on veut comparer une intégrale à un nombre, on écrit ce nombre sous forme d'intégrale. Ici

$$1 - I_n = \int_0^1 \frac{u^n}{1+u^n}\mathrm{d}u$$

Puis, technique habituelle pour ce genre d'exercice (qu'on rencontre à l'oral), on fait un changement de variable : $t = u^n$, ou plutôt $u = t^{1/n}$. Ce qui fait sortir un $1/n$. En facteur d'une intégrale à laquelle il est facile d'appliquer le théorème de convergence dominée (encore la fonction dominante $\widetilde{1}$). On trouve l'équivalent

$$\frac{\ln 2}{n}$$

11 Soit f réelle continue sur $[0,1]$. Montrer que la suite de terme général $n\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\ dt$ admet pour limite $f(1)$.

Solution de 11 :

Changement de variable $t^n = u$, ou plutôt $t = u^{1/n}$. Fonction dominante, par exemple : $\widetilde{N_\infty(f)}$.

12 Déterminer, si elle existe, la limite de la suite de terme général $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{1+nt}\mathrm{d}t$ où f est une fonction continue sur le segment $[0,1]$.

Solution de 12 :

Limite nulle…Fonction dominante $|f|$ par exemple.

13 Soit f continue sur $[0,1]$.

1. Déterminer la limite ℓ quand n tend vers l'infini de $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t^n)}{1+t}\mathrm{d}t$
2. On suppose f dérivable en 0 telle que $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(u)-f(0)}{u}\mathrm{d}u \neq 0$.

   Déterminer un équivalent de $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t^n)}{1+t}\mathrm{d}t\ - \ell$

Solution de 13 :

La limite est $\ln 2\ f(0)$ (théorème de convergence dominée, fonction dominante, par exemple $\widetilde{N_\infty(f)}$). Puis (remarquons que la limite s'écrit sous forme d'une intégrale, forme à laquelle il faut évidemment revenir)

$$\int_0^1 \frac{f(t^n)}{1+t}dt\ - \ell = \int_0^1 \frac{f(t^n)-f(0)}{1+t}\mathrm{d}t$$

Le changement de variable habituel dans ce genre d'exercice : $u = t^n$, ou plutôt $t = u^{1/n}$.

$$\int_0^1 \frac{f(t^n)}{1+t}\mathrm{d}t\ - \ell = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{f(u)-f(0)}{u}\,\frac{u^{1/n}}{1+u^{1/n}}\mathrm{d}u$$

La fonction $g \ : \ u \longmapsto \dfrac{f(u)-f(0)}{u}$ se prolonge à $[0,1]$ en restant continue. On en déduit, par théorème de convergence dominée (domination par exemple par $\widetilde{N_\infty(g)}$) qu'un équivalent est

$$\frac{1}{2n}\int_0^1 \frac{f(u)-f(0)}{u}\mathrm{d}u$$

sous réserve que cette intégrale soit non nulle.

14 **Oral Mines-Centrale** Soit f continue sur $[0,1]$, à valeurs réelles. Etudier la convergence de la suite de terme général $\displaystyle\int_0^1 f(t^n)\mathrm{d}t$.

Solution de 14 : Oral Mines-Centrale

Théorème de congergence dominée, domination par exemple par $\widetilde{N_\infty(f)}$. La limite est $f(0)$.

15 **Oral Mines** Étudier la limite de la suite de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-t^n\right)\mathrm{d}t$.

Solution de 15 : Oral Mines

Domination par la fonction $t \mapsto 1$ si $0 < t < 1$, $\exp(-t)$ si $t \geqslant 1$ (il faut avoir une fonction dominante intégrable...), la convergence simple s'étudie en distinguant les cas $t < 1$, $t = 1$, $t > 1$. La limite est 1.

16 Trouver un équivalent quand $n \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+t^n}}\mathrm{d}t$.

Solution de 16 :

On pourrait espérer une limite, mais si le TCVD s'applique, cette limite va être nulle. On fait un changement de variable $t^n = u$, $t = u^{1/n}$. On obtient

$$I_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{1/n}}{\sqrt{1+u}}\mathrm{d}u$$

La domination

$$\forall u \in [0;1] \qquad \left|\frac{u^{1/n}}{\sqrt{1+u}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+u}}$$

(ou $\leqslant 1$, tout simplement) permet d'appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir

$$\int_0^1 \frac{u^{1/n}}{\sqrt{1+u}}\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+u}}\mathrm{d}u$$

D'où l'équivalent :

$$\frac{2(\sqrt{2}-1)}{n}$$

17 Pour tout entier naturel non nul n, on définit $I_n = \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln x \,\mathrm{d}x$.

Démontrer que la suite (I_n) converge vers une limite que l'on exprimera sous forme intégrale.

Solution de 17 :

On peut montrer l'existence de l'intégrale pour commencer.

Puis on considère $\phi_n\ :\ x \mapsto \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \ln x\ \mathbf{1}_{]0,n[}(x)$. Le suite (ϕ_n) converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers $x \mapsto e^{-x}\ln x$. Et on montre, à l'aide de l'inégalité classique $\ln(1+u) \leqslant u$, que la suite (ϕ_n) est dominée par sa limite, limite qui est intégrable (on fait des études sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$, et on compare à l'exemple de Riemann dans chacun des cas).

18 **Oral CCINP** Soit $[\alpha,\beta]$ un segment réel ; soient (a_n) et (b_n) des suites telles que, pour tout n, $\alpha \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant \beta$ et (a_n) tend vers α, (b_n) tend vers β. Soit (f_n) une suite de fonctions réelles continues sur $[\alpha,\beta]$ convergeant uniformément vers une certaine fonction f.

1. Etudier la convergence de la suite de terme général $\displaystyle\int_{a_n}^{b_n} f_n(t)\ dt$.
2. Soit $g\ :\ [1,e] \mapsto \mathbb{R}$ continue. Montrer que la suite de terme général $n\displaystyle\int_1^{1+1/n} g\left(t^n\right) \mathrm{d}t$ converge vers $\displaystyle\int_1^e \frac{g(s)}{s} ds$.

Solution de 18 : Oral CCINP

Pour la première question, la limite est $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t$, on peut montrer que la différence tend vers 0 grâce à la majoration obtenue par découpage :

$$\left|\int_{a_n}^{b_n} f_n(t)\ dt - \int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant (b_n-a_n)\|f_n-f\|_\infty + \|f\|_\infty\left(\beta-b_n+a_n-\alpha\right)$$

On peut aussi utiliser le théorème de convergence dominée en introduisant la fonction indicatrice de $[\alpha_n,\beta_n]$ mais c'est plus sophistiqué. Pour la deuxième question on fait le changement de variable $u=t^n$, $t=u^{1/n}$, on aboutit à

$$\int_1^{1+1/n} g(t^n)\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_1^{\beta_n} \frac{u^{1/n}g(u)}{u}\mathrm{d}u$$

et on utilise la première question.

2. Interversions séries-intégrales

A. Exercices vus en cours

19 Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

20 On suppose que (a_n) est une suite de nombres complexes telle que $\sum |a_n|$ converge. On définit, sur $\mathbb{R}$, $f\ :\ t \mapsto \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} a_p \sin(pt)$.

Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}_*$, $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt)f(t)\mathrm{d}t = a_m$.

21 Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^t}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

22 **CCINP 19**

Solution de 22 : CCINP 19

1. On pose, pour tout entier naturel n, pour tout $t \in]0,1]$, $f_n(t) = t^n \ln t$.
   Pour tout entier naturel n, f_n est continue par morceaux sur $]0,1]$.
   On a $t^{\frac{1}{2}}|f_n(t)| \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc, au voisinage de 0, $|f_n(t)| = o\left(\dfrac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\right)$.
   Or, $t \mapsto \dfrac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$ est intégrable sur $]0,1]$(fonction de Riemann intégrable).
   Donc f_n est intégrable sur $]0,1]$.
   De plus,pour $x \in]0,1]$, par intégration par parties :
   $\displaystyle\int_x^1 t^n \ln t dt = \left[\frac{t^{n+1}\ln t}{n+1}\right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t^n}{n+1}dt = -\frac{x^{n+1}\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$.
   On en déduit, en faisant tendre x vers 0, que $I_n = -\dfrac{1}{(n+1)^2}$.

2. $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^t = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$ donc, pour tout $t \in]0,1]$, $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n \ln t}{n!}$.
   On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, t \in]0,1]$, $g_n(t) = \dfrac{t^n \ln t}{n!}$.

   i) $\forall n \in \mathbb{N}$, g_n est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1]$ d'après la question 1.
   ii) $\sum g_n$ converge simplement sur $]0,1]$ et a pour somme f.
   iii) f est continue par morceaux sur $]0,1]$.
   iv) $\displaystyle\sum \int_0^1 |g_n(t)|\,\mathrm{d}t = \sum \int_0^1 \frac{-t^n \ln t}{n!}\mathrm{d}t = \sum \frac{-I_n}{n!} = \sum \frac{1}{(n+1)^2 n!}$.
   On a : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^2 n!} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^2}$.
   De plus, $\displaystyle\sum \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge.
   Donc, par critère de majoration des séries à termes positifs, $\sum \dfrac{1}{(n+1)^2 n!}$ converge.
   Alors, d'après le théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions,
   f est intégrable sur $]0,1]$ et on a :
   $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t \ln t\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{t^n \ln t}{n!}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+1)^2} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!(n+1)}$.
   C'est-à-dire, $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t \ln t\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nn!}$.

23 **CCINP 49**

Solution de 23 : CCINP 49

1. Rappelons que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge ($\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$).

   (a) $\sum a_n$ converge absolument, donc converge simplement ; donc la suite (a_n) converge vers 0 et donc elle est bornée.

   Autre méthode : On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}\ |a_n| \leqslant M = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} |a_p|$.

   (b) La suite (a_n) est bornée donc $\exists\, K \in \mathbb{R}^+ \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leqslant K$.
   Soit $t \in [0, +\infty[$.
   On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(t)| \leqslant K \dfrac{t^n}{n!}$. Or la série $\sum \dfrac{t^n}{n!}$ converge, donc $\sum f_n(t)$ converge absolument, donc converge.
   On a donc vérifié la convergence simple de $\sum f_n$ sur $[0, +\infty[$.

2. (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, g_n est continue sur $[0, +\infty[$.
   De plus, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 g_n(t) = 0$, donc, au voisinage de $+\infty$, $g_n(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
   Or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc g_n est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc sur $[0, +\infty[$.
   On pose alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$.

   En effectuant une intégration par parties, on prouve que $I_n = nI_{n-1}$.
   On en déduit par récurrence que $I_n = n! I_0 = n!$.
   Alors $t \mapsto |f_n(t)|$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ car $|f_n(t)| = \dfrac{|a_n|}{n!} g_n(t)$.
   Et on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\mathrm{d}t = \dfrac{|a_n|}{n!} n! = |a_n|$.

   (b) i) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$ d'après la question 2.(a)
   ii) $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ et a pour somme $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ d'après 1.(b).
   iii) f est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ car continue sur $[0, +\infty[$ d'après la question 1.(b) (admis)
   iv) $\sum \displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\, \mathrm{d}t = \sum |a_n|$ et $\sum |a_n|$ converge par hypothèse, donc $\sum \displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\, \mathrm{d}t$ converge.
   Alors, d'après le théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions, f est intégrable sur $[0, +\infty[$ et on a :

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n\, t^n}{n!}\, e^{-t} \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{a_n\, t^n}{n!}\, e^{-t} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} \int_0^{+\infty} t^n\, e^{-t} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}\, n! = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

B. Autres exercices

24 Montrer, en utilisant des séries géométriques, que

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^2 t}{1+t^2}\, \mathrm{d}t = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$. 2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - 1}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$. 3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t-1}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Solution de 24 :

1. Théorème d'inversion N_1, pas de problème pour vérifier les hypothèse, le calcul de la norme N_1 se fait par double IPP, elle vaut $\dfrac{2}{(2n+1)^3}$ (comme on s'y attend).
2. On factorise par e^{-t}, puis théorème d'inversion N_1, pour la convergence de $N_1(f_n)$, utiliser l'inégalité classique $|\sin t| \leqslant |t|$ puis intégrer par partie. Intégrer après interversion avec $\sin t = \mathfrak{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)$.
3. Inversion N_1, l'intégrale de la norme N_1 se calcule par partie, on trouve $\dfrac{1}{(n+1)^2}$. Le reste est facile.

25 **Oral Mines** Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n \ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$. Calculer la limite de I_n, puis un équivalent de I_n.

Solution de 25 : Oral Mines

Soit $f_n : t \in [0,1[\longmapsto \dfrac{t^n \ln t}{t^2-1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $]0,1[$, et(f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $]0,1[$ qui est continue.

De plus, si $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1[$, $|f_n(t)| \leqslant \phi(t) = \dfrac{\ln t}{t^2-1}$ avec $\phi :]0,1[\to \mathbb{R}^+$ continue, positive, intégrable sur $]0,1/2]$ car négligeable devant $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ au voisinage de 0 et intégrable sur $[1/2,1[$ car au voisinage de 1, $\phi(t) \sim \dfrac{t-1}{2(t-1)} = \dfrac{1}{2}$ donc prolongeable par continuité.

Par théorème de convergence dominée, I_n existe et $I_n \to 0$.

Puis, en fixant un n, $I_n = -\displaystyle\int_0^1 t^n \ln t \sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k+n}(-\ln t)\,\mathrm{d}t$.

On pose $g_k : t \in]0,1[\mapsto t^{2k+n}(-\ln t)$ intégrable sur $]0,1[$ avec des arguments similaires à ϕ ci-dessus.

De plus, avec ce qui précède, $\sum g_k$ converge simplement vers $t \mapsto f_n(t)$ qui est continue sur $]0,1[$.

Enfin, $\displaystyle\int_0^1 |g_k(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 g_k(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 t^{2k+n} \ln t\,\mathrm{d}t$ qui se calcule en intégrant par partie (prudemment) : on trouve $\dfrac{1}{(2k+n+1)^2} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4k^2}$ terme général positif de série convergente (par rapport à k).

Le théorème d'inversion d'applique, tout converge et on peut écrire

$$I_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 g_k(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+n+1)^2}$$

On effectue alors une comparaison série intégrale, à n fixé, avec $t \mapsto \dfrac{n}{(2t+n+1)^2}$ décroissante sur $\mathbb{R}^+$. On obtient

$$J_n \leqslant I_n \leqslant J_n + \frac{1}{(n+1)^2}$$

où $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(2t+n+1)^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-1/2}{2t+n+1}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2(n+1)}$ d'où $I_n \sim \dfrac{1}{2n}$ ce qui redonne bien la limite nulle.

26 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto \dfrac{x^{2n+1} \ln x}{x^2 - 1}$.

1. Montrer que f_n est intégrable sur $]0, 1[$.

   On note $J_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t) \, \mathrm{d}t$.
2. Déterminer la limite de $(J_n)_n$.
3. Montrer que $J_n = \dfrac{1}{4} \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2}$.

Solution de 26 :

Similaire au 25.

27

1. Pour $a > 0$ et $b > 0$, montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Solution de 27 :

1. On fait apparaître une série géométrique, on trouve $f_n : t \mapsto (-1)^n t^{a+nb-1}$.

   Le théorème de convergence N_1 ne s'applique pas ici car $N_1(f_n) = \dfrac{1}{a+nb}$.

   Il faut donc y aller « à la main ». Comme on sait calculer les sommes partielles d'une série géométrique, on peut appliquer le TCVD à la suite des sommes partielles $S_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{t^{a-1}}{1+t^b}$ sur $]0, 1[$.

   Les hypothèse se vérifient facilement et on peut dominer avec $|S_n(t)| \leqslant \dfrac{2t^{a-1}}{1+t^b}$.

   Le passage à la limite sous l'intégrale permet de conclure.
2. On décompose en éléments simples en factorisant $t^3 + 1 = (t+1)(t^2 - t + 1)$ et on intègre patiemment.

   On trouve $\dfrac{\ln 2}{3} + \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$.