

RÉGULARITÉ DES SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Suites de fonctions

Exercices vus en cours

1 CCINP 10

Solution de 1 : CCINP 10

1. Pour $x \in [0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = (x^2 + 1)e^x$.

La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto (x^2 + 1)e^x$ sur $[0, 1]$.

On a $\forall x \in [0, 1]$, $f_n(x) - f(x) = (x^2 + 1) \frac{x(e^{-x} - e^x)}{n + x}$, et donc : $\forall x \in [0, 1]$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{2e}{n}$.

Ce majorant indépendant de x tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

2. Par convergence uniforme sur le segment $[0, 1]$ de cette suite de fonctions continues sur $[0, 1]$, on peut intervertir limite et intégrale.

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (x^2 + 1) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n + x} dx = \int_0^1 (x^2 + 1)e^x dx$.

Puis, en effectuant deux intégrations par parties, on trouve $\int_0^1 (x^2 + 1)e^x dx = 2e - 3$.

Autres exercices

2

 Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ fixés. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction de \mathbb{R}^+ vers \mathbb{R} définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = x^p (1 + n^\alpha e^{-nx}).$$

1. Montrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur \mathbb{R}^+ vers une fonction f que l'on précisera.

2. Démontrer que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R}^+ si et seulement si $p > \alpha$.

3. Déterminer le limite pour $n \rightarrow +\infty$ de $\int_0^1 x^5 (1 + n^4 e^{-nx}) dx$.

3

 En utilisant le théorème de Weierstraß, montrer que si $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_a^b t^n f(t) dt = 0, \text{ alors } f \text{ est la fonction nulle.}$$

Séries de fonctions

Exercices vus en cours

Solution de 4 : CCINP 14

1. Comme la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f , et que, $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$, alors f est continue sur $[a, b]$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n - f$ est continue sur le segment $[a, b]$.

On pose alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)|$.

$$\text{On a } \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq (b-a) \|f_n - f\|_\infty. \quad (*)$$

Or (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

$$\text{Donc d'après } (*), \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

2. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$ et $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.

$$\text{On pose } S_n = \sum_{k=0}^n f_k.$$

$\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$, donc converge simplement sur $[a, b]$.

$$\text{On pose alors, également, } \forall x \in [a, b], S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x).$$

$\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ signifie que (S_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers S .

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, S_n est continue sur $[a, b]$, car S_n est une somme finie de fonctions continues.

On en déduit que S est continue sur $[a, b]$.

$$\text{Et d'après 1., } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b S_n(x) dx = \int_a^b S(x) dx.$$

$$\text{Or } \int_a^b S_n(x) dx = \int_a^b \sum_{k=0}^n f_k(x) dx = \sum_{k=0}^n \int_a^b f_k(x) dx \text{ car il s'agit d'une somme finie.}$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \int_a^b f_k(x) dx = \int_a^b S(x) dx.$$

$$\text{Ou encore } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \int_a^b f_k(x) dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) dx.$$

$$\text{Ce qui signifie que } \sum \int_a^b f_k(x) dx \text{ converge et } \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x) dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) dx.$$

Bilan : La convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ où les f_n sont continues sur $[a, b]$ permet d'

$$\text{intégrer terme à terme, c'est-à-dire : } \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

3. La série entière $\sum x^n$ est de rayon de convergence $R = 1$ donc cette série de fonctions converge normalement et donc uniformément sur le compact $\left[0, \frac{1}{2}\right] \subset]-1, 1[$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n$ est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

$$\text{On en déduit alors, en utilisant 2., que : } \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} x^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{2^n}.$$

5 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, 1]$, $f_n(x) = (-1)^n x^n (1-x)^2$.

Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, 1]$ puis déterminer $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

En déduire la valeur de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

Solution de 5 :

Réponse : $2 \ln 2 - \frac{5}{4}$.

6 Montrer que $\zeta : x \in]1, +\infty[\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]1, +\infty[$, donner une expression de ses dérivées sous forme de somme, étudier la convexité de ζ .

Montrer que $\eta : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ est de classe \mathcal{C}^∞ .

7 CCINP 16

Solution de 7 : CCINP 16

1. Soit $x \in [0, 1]$.

Si $x = 0$, $u_n(0) = 0$ et donc $\sum u_n(0)$ converge.

Si $x \neq 0$, comme au voisinage de $+\infty$, $u_n(x) = -\frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, alors $|u_n(x)| \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^2}{2n^2}$.

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge donc, par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n(x)$ converge absolument, donc converge.

On en déduit que la série des fonctions u_n converge simplement sur $[0, 1]$.

La fonction S est donc définie sur $[0, 1]$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, u_n est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ et $\forall x \in [0, 1]$, $u'_n(x) = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} = \frac{-x}{n(x+n)}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0, 1]$, $|u'_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$.

On en déduit que $\|u'_n\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |u'_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$.

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Donc $\sum_{n \geq 1} u'_n$ converge normalement, donc uniformément sur $[0, 1]$.

On peut alors affirmer que la fonction S est de classe \mathcal{C}^1 . Elle est donc dérivable sur $[0, 1]$.

Et on a : $\forall x \in [0, 1]$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x)$.

2. En vertu de ce qui précède, $S'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$.

Or $\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{N+1} - 1 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -1$.

Donc $S'(1) = -1$.

8 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on pose $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$.

Montrer que $\sum f_n$ converge simplement vers f de classe \mathcal{C}^1 . Calculer f' et étudier les variations de f .

Autres exercices

9 Continuité, dérivabilité, variations, limites de $f : x \mapsto \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4 + n^2 x^2}$.

Solution de 9 :

Il y a convergence normale sur \mathbf{R} , donc uniforme, les fonctions $x \mapsto 1/(n^4 + n^2 x^2)$ sont continues, donc f l'est (sur \mathbf{R} tout entier).

10 Étudier la convergence simple, uniforme, normale de la série de fonctions $f_n : x \mapsto e^{-n} \cos(n^2 x)$, puis la dérivabilité de la somme de cette série de fonctions. Déterminer un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \left| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) - \sum_{n=0}^N f_n(x) \right| \leq 10^{-3}.$$

11 Étudier la convergence simple, uniforme, normale de la série de fonctions $f_n : x \in \mathbf{R}_+^* \mapsto e^{-n^2 x}$.

Vérifier que sa somme est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R}_+^* , déterminer sa limite en $+\infty$, ainsi qu'un développement asymptotique de la somme à la précision e^{-2x} au voisinage de $+\infty$.

Indication : On pourra sortir quelques termes de la somme et vérifier que le reste est négligeable.

Solution de 11 :

La convergence simple se règle facilement, en disant par exemple que pour n'importe quel $x > 0$,

$$\exp(-n^2 x) = \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

(par croissances comparées). On majore facilement $|f_n|$ par 1 sur \mathbf{R}_+^* , et c'est le plus petit majorant possible, car $\lim_0 f_n = 1$. Il n'y a donc pas convergence normale, vu que $\|f_n\|_\infty = 1$. Il y a en revanche convergence normale sur tout $[a, +\infty[$, $a > 0$ (car $\|f_n|_{[a, +\infty[}\|_\infty = \exp(-n^2 a)$). Il n'y a pas non plus convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $]0, +\infty[$, sinon la suite (f_n) convergerait uniformément vers $\tilde{0}$, ce qui n'est pas le cas.

La convergence uniforme sur $[a, +\infty[$, où l'on a fixé un $a > 0$ arbitraire, permet néanmoins d'utiliser le théorème de la double limite, et de trouver, en notant $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, que $\lim_{+\infty} S = 1$.

Pour un développement asymptotique, la stratégie est souvent d'utiliser des comparaisons série-intégrale après avoir éventuellement mis de côté certains termes. Ici, une majoration simple permet d'éviter le recours un peu plus long à la comparaison série-intégrale : pour tout $x > 0$, $S(x) = 1 + e^{-x} + e^{-4x} + R(x)$ où

$$0 \leq R(x) = \sum_{k=3}^{+\infty} e^{-k^2 x} \leq \sum_{k=3}^{+\infty} e^{-kx} = \frac{e^{-3x}}{1 - e^{-x}}$$

ce qui donne facilement

$$S(x) = 1 + e^{-x} + o_{x \rightarrow +\infty}(e^{-2x})$$

12

1. Pour quelles valeurs du réel x la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n + n^2 x^2}$ converge-t-elle ?
2. Démontrer la continuité de la somme sur son domaine de définition.
3. Donner un équivalent de sa somme au voisinage de 0 et de $+\infty$.

Solution de 12 :

Plan de résolution : il y a convergence sur $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, uniforme car normale sur tout segment inclus dans $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ ce qui assure la transmission de la continuité.

On pourrait montrer que la limite en $+\infty$ est nulle par double limite, la limite en 0 est $+\infty$ par technique habituelle (la fonction décroît, si elle n'a pas pour limite $+\infty$ en 0 elle est majorée, on en déduit que les sommes partielles sont uniformément majorées, on peut dans une somme partielle faire tendre la variable vers 0, on en déduit que $\sum 1/n$ converge. Tout cela ne nous donne pas d'équivalent !

L'idée à avoir, dans ce genre de question (équivalent), c'est la comparaison à une intégrale. Ici, notant $S(x)$ la somme de la série de fonctions au point x , on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t + t^2 x^2} \leq S(x) \leq \frac{1}{1 + x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t + t^2 x^2}$$

Le calcul de l'intégrale se fait : on décompose en éléments simples

$$\frac{1}{t + t^2 x^2} = \frac{1}{t} - \frac{x^2}{1 + tx^2}$$

Pour ne pas couper une intégrale qui existe en deux intégrales qui n'existent pas, on passe par

$$\int_1^A \frac{dt}{t + t^2 x^2} = \int_1^A \frac{dt}{t} - \int_1^A \frac{x^2}{1 + tx^2} dt$$

On intègre avec des ln, on prend les limites quand $A \rightarrow +\infty$, et finalement on aboutit à

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \leq S(x) \leq \frac{1}{1 + x^2} + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

En $+\infty$, c'est raté, on ne peut qu'espérer qu'il y a un équivalent du type a/x^2 , avec $1 \leq a \leq 2$. Mais en revanche, en 0, l'encadrement permet de conclure :

$$S(x) \sim_{x \rightarrow 0} -2 \ln x$$

Alors au voisinage de $+\infty$, que fait-on ? on observe, et on se dit que n ne pèse pas lourd devant $n^2 x^2$. Donc,

notant $b = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, on espère que

$$S(x) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{b}{x^2}$$

Pour cela, on écrit

$$S(x) - \frac{b}{x^2} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(1 + nx^2)}$$

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2(1+nx^2)}$ converge normalement sur $[0, +\infty[$, on peut lui appliquer le théorème de la double limite en $+\infty$, on obtient

$$S(x) - \frac{b}{x^2} = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)$$

d'où l'équivalent. Hors-programme : $b = \pi^2/6$, et on a bien $1 \leq b \leq 2$, c'est agréable.

13 Pour tout réel $x \notin \mathbb{Z}^-$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ et $g(x) = e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. Justifier l'existence de $f(x)$ et $g(x)$.
2. Déterminer leurs limites en $+\infty$.
3. Trouver une relation entre $f(x+1)$ et $f(x)$ et montrer que g vérifie cette même relation.
4. En déduire que $f = g$.
5. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ .

Solution de 13 :

1. Pour f , on peut utiliser le critère de d'Alembert pour l'absolue convergence :

$$\left| \frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)} \right| = \frac{1}{|x+n+1|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1$$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ converge absolument donc converge pour tout $x \notin \mathbb{Z}^-$.

Pour g , on est tenté d'utiliser le TSSA. C'est possible car $\left(\frac{1}{n!(x+n)} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ à partir du rang $\max(0, \lceil -x \rceil)$ (pour avoir $x+n > 0$), et, bien sûr, $\frac{1}{n!(x+n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

2. On vérifie que f converge normalement sur $[1, +\infty[$: si $x \geq 0$, $\left| \frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!}$ terme général de série convergente.

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ par double limite, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Pour g , on a pour $x \in [1, +\infty[$, $\left| \frac{(-1)^n}{n!(x+n)} \right| = \frac{1}{n!(x+n)} \leq \frac{1}{(n+1)!}$ terme général de série convergente donc convergence normale donc uniforme sur $[1, +\infty[$ (on aurait aussi pu utiliser la majoration du reste dans le TSSA). Par double limite, $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

3. On calcule

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{x(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n+1)} \\ &= x \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+m)} = x \left(f(x) - \frac{1}{x} \right) = xf(x) - 1. \end{aligned}$$

Puis,

$$xg(x) = e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(x+n-n)}{n!(x+n)} = e \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n!} - \frac{n(-1)^n}{n!(x+n)} \right) = e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} - e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(-1)^n}{n!(x+n)}$$

(licite car les deux séries convergent bien). Le terme pour $n = 0$ est nul dans la deuxième (attention, pas de factorielle de nombre < 0) et on reconnaît une série exponentielle dans la première. Donc

$$xg(x) = e \cdot e^{-1} - e \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!(x+n)} = 1 + e \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m!(x+1+m)} = 1 + g(x+1).$$

4. On obtient alors pour tout x , $f(x) - g(x) = \frac{f(x+1) - g(x+1)}{x}$ puis par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) - g(x) = \frac{f(x+n) - g(x+n)}{x(x+1)\dots(x+n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

avec $f(t) - g(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (c'est la convergence simple de f).

5. Pour montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ , on montre que $g(=f)$ l'est. On applique le théorème du cours : pour tout n , $g_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ est de classe \mathcal{C}^∞ et pour tout k , $g_n^{(k)} : x \mapsto \frac{(-1)^{n+k} k!}{n!(x+n)^{k+1}}$. Pour montrer la convergence uniforme, on applique le TSSA sur un segment $[a, b]$ ne contenant pas d'entiers négatifs à partir d'un certain rang : $\left(\frac{k!}{n!(x+n)^{k+1}} \right)_{n \geq N}$ avec $N = \max(0, \lceil -b \rceil)$ (pour avoir $x+n > 0$) décroît vers 0.

Alors, en notant R_n^k le reste d'ordre n , $|R_n^k| \leq \frac{k!}{(n+1)! |x+n+1|^{k+1}} \leq \frac{k!}{(n+1)! |a+n+1|^{k+1}}$ qui est indépendant de x et tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$, donc il y a convergence uniforme de toutes les séries de dérivées et le théorème du cours s'applique.

14

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \text{Arctan}(x+n) - \text{Arctan}(n)$.

1. Étudier l'existence et la continuité de $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

On pourra penser au théorème des accroissements finis.

2. Montrer que $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Solution de 14 :

1. Utiliser le théorème des accroissements finis. CN sur tout segment.

2. Se ramener au voisinage de 0 et utiliser la série divergente $\sum \text{Arctan} \frac{1}{n}$.