Convexité

Exercices vus en cours

1 Montrer qu'une fonction convexe sur I est admet en chaque point de $\mathring{I}$ une dérivée à gauche et une dérivée à droite et en déduire que f est continue sur $\mathring{I}$. Est-ce le cas sur I ?

2 Étudier la convexité de exp, ln, $t \mapsto t^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$, sin, tan.

3 Montrer les inégalités suivantes

1. **Inégalité arithmético-géométrique** : pour tout $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_*^+$,
$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} \leqslant \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$
Qu'obtient-on en remplaçant x_i par $\dfrac{1}{x_i}$?
2. $\forall\, x > -1,\ \ \ln(1+x) \leqslant x.$
3. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x.$
4. $\forall\, x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ \ \dfrac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x.$

Barycentres, parties convexes

4 Soit A, B, C trois points du plan $\mathbb{R}^2$. Déterminer la position de $G = \mathrm{Bar}\big((\mathrm{A}, \alpha), (\mathrm{B}, \beta), (\mathrm{C}, \gamma)\big)$ où $\alpha + \beta + \gamma = 1$ en fonction du signe de α, β et γ. (α, β, γ) sont appelées coordonnées barycentriques de G.

5 **Enveloppe convexe**

L'enveloppe convexe d'une partie A d'un espace vectoriel réel E est le plus petit convexe contenant A.
Comment l'exprimer à l'aide d'une intersection ?
Comment décrire ses éléments à l'aide de barycentres ?

Solution de 5 : Enveloppe convexe

C'est l'intersection de tous les convexes contenant A et aussi l'ensemble des barycentres à cœfficients positifs.
À chaque fois, c'est bien convexe, contenant A et plus petit que tous les autres.

6 **Points extrémaux** Soit C une partie convexe d'un espace vectoriel E. On dit qu'un point x de C est extrémal lorsque :
$$\forall (a,b) \in C^2 \qquad x \in [a,b] \Longrightarrow \big(x = a \quad \text{ou} \quad x = b\big)$$
Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ un convexe ayant n points extrémaux, $n \geqslant 2$.
Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ un convexe borné non vide n'ayant aucun point extrémal.
Existe-t-il dans $\mathbb{R}^2$ des parties qui ont un unique point extrémal ?

Solution de 6 : Points extrémaux

Pour le premier, un polygone à n côté convient.

Pour le deuxième, un disque ouvert.

Pour le troisième, la partie du plan délimitée par deux demi-droites de même origine.

7 Théorème de Gauss-Lucas

Soit P un polynôme de degré au moins 2 de $\mathbb{C}[X]$. Démontrer que les racines de P' se trouvent dans l'enveloppe convexe des racines de P c'est-à-dire sont des barycentres à cœfficients positifs de celles-ci, soit encore des combinaisons linéaires à cœfficients positifs de somme 1.

On pourra s'intéresser à $\frac{P'}{P}$.

Solution de 7 : Théorème de Gauss-Lucas

Quantité conjuguée....

$$0 = \sum \lambda_k (z - x_k) \text{ avec } \lambda_k = \frac{1}{|z - x_k|^2}.$$

Fonctions convexes

8 Soient I intervalle de $\mathbb{R}$, $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$, f et g ont même monotonie et f et g sont convexes sur I. Montrer que fg est convexe sur I.

Solution de 8 :

Vérifier que $((1-t)f(x) + tf(y))((1-t)g(x) + tg(y)) \leqslant (1-t)f(x)g(x) + tf(y)g(y)$ en développant puis factorisant la différence.

9

1. Montrer que la composée (à gauche) d'une fonction convexe par une fonction convexe croissante est convexe.
2. Montrer qu'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$ dont la composée avec ln (à gauche) est convexe (on parle de fonction log-convexe) est une fonction convexe.

Solution de 9 :

1. Il suffit de composer l'inégalité de convexité avec la fonction croissante.
2. Composer avec l'exponentielle.

10 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue strictement décroissante et convexe. Étudier la convexité de la fonction $f^{-1} : f(I) \to I$.

Solution de 10 :

Elle est convexe, en passant par la définition, directement.

11 **Inégalité de Bernoulli** Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \forall\, x \geqslant 0,\ \ x^{n+1} - (n+1)x + n \geqslant 0$.

Solution de 11 : Inégalité de Bernoulli

$f : x \mapsto x^{n+1}$ est convexe, sa tangente en 1 a pour équation $y = (n+1)(x-1) + 1$.

12 Montrer que $\forall (x,y)\in]1,+\infty[^2$ on a : $\ln \dfrac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{\ln x \ln y}$.

Solution de 12 :

Concavité de $\ln\circ\ln$.

13 Soit f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $f'' \leqslant 1$. Montrer que

$$f(0)-2f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)\leqslant \frac{1}{4}.$$

Solution de 13 :

Convexité de $g : x\mapsto x^2-2f(x)$ appliquée en $\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot 0+\dfrac{1}{2}\cdot 1$.

14 Montrer que parmi les polygones convexes inscrits dans un cercle donné, les polygones réguliers ont un périmètre maximal.

Solution de 14 :

En notant θ_k les angles au centre, pour un n-gone inscrit dans un cercle de rayon R, le périmètre est $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2R\sin\theta_k$ avec sin concave sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

15 Soit $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ convexe et majorée. Montrer que f est constante. *(On pourra raisonner par l'absurde.)* Le résultat est-il vrai si f définie sur $\mathbb{R}^+$?

Solution de 15 :

Sinon, si on a $x<y$ tels que $f(x)<f(y)$. Si $z>y$, $\tau_x(y)\leqslant\tau_x(z)$ donne $f(z)\geqslant\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-x)+f(x)$ donc $f(z)\xrightarrow[z\to+\infty]{}+\infty$ ce qui est contradictoire.

Si on a $x<y$ tels que $f(x)>f(y)$. Si $z<x$, $\tau_x(z)\leqslant\tau_x(y)$ donne $f(z)\geqslant\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-x)+f(x)$ donc $f(z)\xrightarrow[z\to-\infty]{}+\infty$ ce qui est contradictoire.

Sur $\mathbb{R}^+$, une demi-droite convient, ou $x\mapsto e^{-x}$.

16 Soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ convexe, croissante, non constante. Montrer que $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$.

Solution de 16 :

Si $x>1$, $\tau_0(1)\leqslant\tau_0(x)$ donne $f(x)\geqslant(f(1)-f(0))x+f(0)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$.

17 **Inégalité de Jensen continue** Soit $f : [a,b]\to\mathbb{R}$ et $\phi : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues, ϕ convexe. On suppose $a<b$. On veut montrer que

$$\phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(f(t))\,\mathrm{d}t$$

1. Démontrer l'inégalité en utilisant des sommes de Riemann.

2. On suppose désormais ϕ de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $\gamma \in \mathbb{R}$, montrer

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \phi(x) \geqslant \phi(\gamma) + (x-\gamma)\phi'(\gamma) \tag{1}$$

3. On applique (1) à $x = f(t)$, puis on intègre l'inégalité obtenue entre a et b. Comment choisir γ pour en déduire l'inégailté de Jensen ?
4. Ecrire l'inégalité de Jensen continue pour $\phi \ : \ x \longmapsto x^2$. Vérifier que le résultat peut s'obtenir grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
5. Ecrire l'inégalité de Jensen continue pour $\phi \ : \ x \longmapsto 1/x$: on supposera la fonction f à valeurs réelles strictement positives. Vérifier que le résultat peut (encore !) s'obtenir grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Solution de 17 : Inégalité de Jensen continue

Indications :

1. Riemann + Jensen discret.
2. Courbe au dessus de la tangente.
3. $\gamma = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Corrigé :

1. Définissons, pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$. C'est une somme de Riemann associée à f et à la subdivision régulière de pas $\dfrac{b-a}{n}$ sur le segment $[a,b]$. En utilisant la convexité de ϕ,

$$\phi\left(\frac{S_n}{b-a}\right) = \phi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\phi\left(f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right)$$

Mais $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$,

$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\phi\left(f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi\left(f(t)\right)\,\mathrm{d}t$,

ϕ est continue, les inégalités larges « sont conservées à la limite »... On conclut donc.
2. C'est du cours (le graphe de ϕ est au-dessus de ses tangentes).
3. Donc, pour tout $t \in [a,b]$,

$$\phi\left(f(t)\right) \geqslant \phi(\gamma) + \left(f(t)-\gamma\right)\phi'(\gamma)$$

On intègre entre a et b ($a < b$, donc l'inégalité ne change pas de sens), ce qui donne

$$\int_a^b \phi\left(f(t)\right)\mathrm{d}t \geqslant (b-a)\phi(\gamma) + \left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \gamma(b-a)\right)\phi'(\gamma)$$

En particulier, prenons $\gamma = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b \phi\left(f(t)\right)\mathrm{d}t$, on obtient bien l'inégalité souhaitée.
4. La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe, l'inégalité s'écrit :

$$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t$$

ou encore

$$\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t$$

ce qui est bien une inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_a^b 1\times f(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b 1^2\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t\right)$$

5. La fonction $x \mapsto 1/x$ est convexe sur $]0,+\infty[$, ce qui permet d'écrire

$$\frac{b-a}{\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t} \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$$

ou encore

$$(b-a)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\right)$$

(inégalité rencontrée par exemple dans un exercice d'oral X avec $a=0$, $b=1$, ce qui la rend plus esthétique :

$$1 \leqslant \left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^1 \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\right)$$

Mais en tout cas, Cauchy-Schwarz fonctionne encore ici, en prenant les fonctions $\sqrt{f}$ et $1/\sqrt{f}$.

18 Établir que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall\, x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_*^+,\ \ 1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n (1+x_k)\right)^{1/n}$.

En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}_*^+$,

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n (a_k+b_k)\right)^{1/n}.$$

Solution de 18 :

Convexité de $x \mapsto \ln(1+\mathrm{e}^x)$.

19 Montrer que si f est une fonction convexe et dérivable sur I, alors f' est continue sur I.

(On pourra appliquer le théorème des accroissements finis entre x et $x+h$ et utiliser le fait qu'une fonction croissante a des limites à gauche et à droite.)

20 Fonctions mid-convexes

Une fonction est dite mid-convexe sur un intervalle I si pour tout $(x,y)\in I^2$,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\big(f(x)+f(y)\big).$$

Montrer que, si f est continue, f est convexe si et seulement si elle est mid-convexe.

(On pourra commencer par montrer que l'ensemble

$$A(x,y)=\Big\{t\in[0,1]\mid f(tx+(1-t)y)\leqslant tf(x)+(1-t)f(y)\Big\}$$

contient tous les $\dfrac{k}{2^n}$*...)*

Solution de 20 : Fonctions mid-convexes

Indication :

Montrer l'indication par récurrence puis utiliser un argument de densité.

Corrigé :

Il n'y a qu'un sens intéressant.

Méthode 1 On voit assez facilement que si on itère l'application de

$$f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(f(x)+f(y)\right)$$

on obtient par exemple :

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(x+y)+y\right)\right)&\leqslant\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)+f(y)\right)\\&\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(f(x)+f(y)\right)+f(y)\right)\end{aligned}$$

ce qui se résume à

$$f\left(\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}y\right)\leqslant\frac{1}{4}f(x)+\frac{3}{4}f(y)$$

d'où l'idée de démontrer, par récurrence sur n :

$$\forall n\geqslant 0\ \forall k\in[\![0,2^n]\!]\ \forall(x,y)\in I^2\qquad f\left(\frac{k}{2^n}x+(1-\frac{k}{2^n})y\right)\leqslant\frac{k}{2^n}f(x)+(1-\frac{k}{2^n})f(y)$$

La récurrence n'est pas difficile à établir : il suffit de dire que, si k et k' sont dans $[\![0,2^n]\!]$, on a

$$f\left(\frac{1}{2}\left(\left(\frac{k}{2^n}x+(1-\frac{k}{2^n})y\right)+\left(\frac{k'}{2^n}x+(1-\frac{k'}{2^n})y\right)\right)\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{k}{2^n}x+(1-\frac{k}{2^n})y\right)+f\left(\frac{k'}{2^n}x+(1-\frac{k'}{2^n})y\right)\right)$$

on simplifie, on utilise la propriété à l'étape n, on en déduit la propriété à l'étape $n+1$.

Pour conclure, on utilise alors la continuité de f et la densité de l'ensemble $\left\{\dfrac{k}{2^n}\ ;\ 0\leqslant k\leqslant 2^n\right\}$ dans $[0,1]$ (qui se démontre comme dans l'exercice de topologie sur les sous-groupes additifs de $\mathbf{R}$).

Méthode 2 (Beaucoup plus graphique, mais demande des notions de topologie). On raisonne par l'absurde, en supposant que f ne soit pas convexe. On fixe alors $x<y$ dans I et $t_0\in]0,1[$ tels que

$$f\left(t_0x+(1-t_0)y\right)>t_0f(x)+(1-t_0)f(y)$$

Par continuité de f,

$$A=\{u\in[0,t_0]\ ;\ f(ux+(1-u)y)=uf(x)+(1-u)f(y)$$

est un fermé relatif de $[0,t_0]$ (image réciproque d'un fermé par une application continue), donc un fermé (un fermé relatif A d'un fermé F est l'intersection avec ce fermé F d'un fermé G, donc est fermé). Non vide car il contient 0. Il a donc un plus grand élément (il est non vide majoré, il a donc une borne supérieure, qu'il contient car il est fermé). On appelle t_1 cet élément, et on note $x_1=t_1x+(1-t_1)y$ (évidemment, on ne fait que décrire ce qu'on voit sur un dessin : x_1 est l'abscisse du dernier point avant $t_0x+(1-t_0)y$ en lequel la corde $[(x,f(x)),(y,f(y))]$ rencontre la courbe).

De même,

$$B=\{u\in[t_0,1]\ ;\ f(ux+(1-u)y)=uf(x)+(1-u)f(y)$$

a un plus petit élément t_2, et on note $x_2=t_2x+(1-t_2)y$ (x_2 est l'abscisse du premier point après $t_0x+(1-t_0)y$ en lequel la corde $[(x,f(x)),(y,f(y))]$ rencontre la courbe).

Sur $]t_1,t_2[$, l'application continue

$$u\mapsto f(ux+(1-u)y)-uf(x)-(1-u)f(y)$$

ne s'annule pas et est continue, donc garde un signe constant strict d'après le théorème des valeurs intermédiaires, donc est strictement positif (c'est son signe en t_0). En particulier en $(t_1+t_2)/2$, ce qui donne finalement

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))$$

21 Soit $f\ :\ \mathbb{R}_*^+\longrightarrow\mathbb{R}$ convexe.

1. Montrer que $x\mapsto\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers une limite ou $+\infty$ en $+\infty$.
2. Montrer que si $\dfrac{f(x)}{x}\xrightarrow[x\to\infty]{}\ell\in\mathbb{R}$, alors $x\mapsto f(x)-\ell x$ tend vers une limite finie ou $-\infty$ en $+\infty$.