1.2.6. Mathématiques II — PSI

- Remarques générales

Il s'agissait d'établir une caractérisation, due à Wang et Wu (J.-H. Wang, P.Y. Wu, *Sums of square-zero operators*, Studia Math. 99 (1991), 115–127), des endomorphismes d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie pouvant se décomposer en la somme de deux endomorphismes de carré nul. Le contrat était ici rempli modulo le cas des endomorphismes nilpotents, dont on admettait le caractère échangeur : ce dernier résultat fait essentiellement intervenir la réduction de Jordan d'un endomorphisme nilpotent et était difficilement abordable dans le cadre d'une épreuve de concours. Signalons que l'équivalence entre les conditions (C1) à (C3) de l'énoncé tient sur un corps arbitraire de caractéristique différente de 2, tandis que l'équivalence entre le caractère échangeur et la décomposabilité en somme de deux endomorphismes de carré nul reste vraie sur un corps quelconque (voir J.D. Botha, *Sums of two square-zero matrices over an arbitrary field*, Linear Algebra Appl. 436 (2012), 516–524). La condition (C3) est en revanche toujours vérifiée sur un corps de caractéristique 2. La démonstration présentée ici fait en grande partie intervenir la notion de *sous-espace caractéristique* associé à une valeur propre d'un endomorphisme u, développée dans la partie D.

Le sujet, d'un niveau et d'une longueur conformes aux standards du concours, mobilisait les connaissances du programme d'algèbre linéaire de première et seconde année en filière PSI, y compris la réduction des endomorphismes et les polynômes d'endomorphismes. Le sujet contenait une large majorité de questions de difficulté faible à moyenne. Les questions les plus délicates étaient les 14, 15, 18, 20, 21 et 22 : elles ont permis aux meilleurs candidats de s'exprimer et ont mis quasiment tous les autres en échec. En grande majorité, les candidats ont traité les questions 4 à 12.

Trop de copies sont mal rédigées, mal présentées et mal orthographiées. Des sanctions systématiques ont été appliquées aux copies truffées de symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ utilisés à mauvais escient.

Cette année, le jury n'a pas eu à déplorer de contresens particulier sur les objets introduits dans le préambule. Les candidats ne devaient pas jouer sur les mots et faire comme si la notion d'endomorphismes semblables leur était connue : en particulier il n'était pas acceptable d'annoncer sans explication que deux endomorphismes semblables ont la même trace. Beaucoup de candidats ont, en fin de partie D, confondu le sous-espace caractéristique $E_\lambda^c(f)$ avec le sous-espace propre $E_\lambda(f)$.

Trop de candidats confondent ouvertement endomorphismes et matrices carrées, ce qui était d'autant plus problématique ici que l'on raisonnait sur des espaces vectoriels abstraits dénués de toute base *canonique*. À ce titre, les candidats doivent faire preuve de davantage de précision dans leur rédaction : parler de *la* matrice associée à un endomorphisme, sans indiquer de base, n'est pas acceptable. La précision dans les raisonnements fait aussi trop souvent défaut dès qu'apparaissent des objets formels : ainsi, en 2, très peu de candidats mentionnent (et justifient !) que δ et $-\delta$ sont différents.

Dans l'ensemble, le jury a pu constater, pour une moitié des copies corrigées, une maîtrise à peu près convenable des outils d'algèbre linéaire de première année (typiquement, la question 9 est partiellement réussie par une bonne proportion de candidats). En revanche, les outils de seconde année ne semblent souvent pas faire partie de l'arsenal des candidats. Le théorème de Cayley-Hamilton est trop peu souvent utilisé pour résoudre efficacement la question 2 ; la stabilisation d'un noyau ou d'une image par commutation n'est un réflexe que chez une infime fraction des candidats (voir les questions 13 et 17, où l'application de ce principe général échappe à presque tous) ; enfin, l'utilisation d'un polynôme annulateur pour discuter un spectre (question 14) est une idée qui ne vient spontanément qu'à une vingtaine de candidats parmi les 5000 ayant passé l'épreuve. Le sujet était conçu pour qu'une utilisation judicieuse des outils de seconde année permette d'avancer rapidement, mais peu sont ceux qui ont su en tirer profit, les autres se rabattant systématiquement sur des techniques rudimentaires et lourdes.

- Détail des questions

– La trace est effectivement invariante par similitude, mais dans le cas des endomorphismes on attendait une explication : en effet, la notion d'endomorphismes semblables est normalement inconnue des étudiants, et il est hors de question d'admettre quelque résultat que ce soit sur elle, plus particulièrement dès la première question du sujet. Les candidats pouvaient utiliser l'identité, $\forall (u,v) \in \mathrm{L}(E)^2, tr(u \circ v) = tr(v \circ u)$ mais pas $\forall (u,v,w) \in \mathrm{L}(E)^3, tr(u \circ v \circ w) = tr(v \circ u \circ w)$ puisque cette dernière est fausse !

– Les candidats pouvaient utiliser la formule $\chi_u = X^2 - tru X + \det u$ pour obtenir l'essentiel des résultats de cette question. Le jury a lu énormément de raisonnements faux : un endomorphisme d'un plan vectoriel n'a pas nécessairement deux valeurs propres distinctes, un polynôme annulateur de degré 2 n'est pas nécessairement le polynôme caractéristique, etc. Le fait qu' $\delta \neq -\delta$ était crucial pour déterminer la dimension des sous-espaces propres de u : il fallait le mentionner et le justifier. On a vu souvent apparaître l'écriture $\sqrt{\det(u)}$, qui n'avait pas ici de sens.

– Beaucoup de candidats signalent leur incompréhension de la notion de droite propre en proposant comme sous-espaces échangés $E_\delta(u)$ et $E_{-\delta}(u)$. D'autres ont la bonne idée, à savoir considérer $D = Vect(x+y)$ où x et y sont des vecteurs propres associés respectivement à δ et $-\delta$. Attention de ne pas se limiter à des vecteurs respectifs de $E_\delta(u)$ et $E_{-\delta}(u)$, qui pourraient être nuls. Pour ceux qui trouvent une droite correcte, il est trop rare de lire des démonstrations totalement justifiées des propriétés attendues de D.

– Question facile le plus souvent réussie : revenir aux coefficients n'était pas une bonne idée pour justifier la réponse, le calcul par blocs était plus judicieux.

– Pour l'inversibilité de D et le calcul de D^{-1}, tout argument incorrect était sanctionné. Le calcul de D^2 suffisait à conclure. L'usage d'une comatrice (hors programme !) pour calculer D^{-1} n'était pas judicieux. On attendait plusieurs étapes de calcul pour DMD^{-1}.

– On attendait une justification minimale. À ce titre, non seulement $u(F) \subset G$ n'implique pas $u(F) \not\subset F$ (que penser du vecteur nul ?), mais ce dernier fait ne donnait pas aux candidats les informations qu'ils prétendaient tirer sur la forme de la matrice.

– On attendait non seulement une référence aux questions 5 et 6, mais aussi une rédaction impeccable sur le retour aux endomorphismes. Le cas où l'un des espaces est nul est rarement bien traité : dans celui-ci les données introduites à la question 6 étaient caduques ; il est vrai que u est alors nul, mais on ne peut se contenter de l'affirmer. Signalons que, géométriquement, on pouvait prendre pour a (respectivement, pour b) l'endomorphisme nul sur G (respectivement, sur F) et dont la restriction à F (respectivement, à G) coïncide avec u ; on pouvait aussi prendre pour φ la symétrie par rapport à F et parallèlement à G.

– Question classique souvent bien traitée.

– Il y avait de nombreuses façons de procéder et on pouvait même raisonner sans la moindre référence à la dimension finie. Notons que les égalités $Ker a = \mathrm{Im} a$ et $Ker b = \mathrm{Im} b$ ne servaient pas réellement dans la suite (seule l'inclusion facile était utilisée), mais leur démonstration a permis de mettre en valeur les candidats ayant de la suite dans les idées.

– Question souvent bien réussie. Attention, pour un sous-espace vectoriel F de E, l'égalité $(a+b)(F) = a(F) + b(F)$ ne tient pas en général.

– À quoi bon raisonner par récurrence ? Le passage de $v^k(x) = 0$ à $v^{k+1}(x) = 0$ devait être justifié. Plusieurs candidats confondent $(f - \lambda \mathrm{id})^2$ et $f^2 - \lambda^2 \mathrm{id}$.

- Le fait que la suite des dimensions $(\dim Kerv^k)_{k\in\mathbf{N}}$ est stationnaire est rarement bien justifié. Il est vrai que toute suite d'entiers croissante et majorée est stationnaire, mais on voit mal dans quel paragraphe du programme ce résultat est censé figurer.
- Cette question fait souvent la distinction entre les bonnes copies et les autres. Le théorème du rang ne suffit pas à justifier l'égalité $E = Kerv^p \oplus Imv^p$. Partir d'un élément de $Kerv^p$ et l'écrire comme un élément de $Kerv^{2p}$ n'était pas de nature à faire progresser vers une solution. Pour les stabilités exigées en fin de question, le recours à une commutation aurait été judicieux (le fait qu'un polynôme en f commute nécessairement avec f pouvait être considéré comme un résultat de cours).
- La première partie de la question est parfois bien réussie. On aurait aimé avoir des explications sur l'inclusion $Kerv \subset Kerv^p$, car elle ne pouvait pas directement se déduire de la question 11 dans le cas $p = 0$. La deuxième partie de la question est rarement bien traitée. Une fois démontré qu' λ est la seule valeur propre possible de $f_{|E_\lambda^c(f)}$, on pouvait conclure rapidement en notant que cet endomorphisme a au moins une valeur propre puisque $E_\lambda^c(f)$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Ici, trop peu de candidats pensent à utiliser un polynôme annulateur de $f_{|E_\lambda^c(f)}$.
- Cette question difficile a été très peu réussie.
- Ici a et b n'avaient aucune raison de commuter, et il fallait donc développer u^2 en $a^2 + ab + ba + b^2$. Il était judicieux de commencer par simplifier l'expression d' u^2 avant de calculer u^2a et au^2.
- C'est souvent bien compris, mais un appel à un théorème du cours aurait permis de proposer des solutions plus efficaces que celles que le jury a le plus souvent vues.
- Cette question n'est traitée qu'épisodiquement. Très peu de candidats identifient correctement u_F comme un endomorphisme nilpotent et u_G comme un automorphisme. La difficulté était ensuite de voir comment, à partir du caractère échangeur de ces endomorphismes, obtenir celui de u.
- Question souvent traitée et assez péniblement rédigée. Les calculs sont rarement présentés de manière intelligible.
- Ces questions n'ont qu'épisodiquement été traitées correctement, les quelques tentatives de grappillage ont souvent été vaines. Traiter la deuxième partie de la question 21 ne rapportait rien si la première n'était pas réussie.

- Terminons par quelques conseils pour les futurs candidats.
- Maîtriser parfaitement son cours.
- Bien réfléchir, aidé d'un brouillon, à la structure du raisonnement ou du calcul avant de le coucher sur le papier. Au moment de la rédaction, donner toutes les justifications pertinentes (et rien qu'elles !), et structurer correctement ses raisonnements.
- Il est toujours préférable d'analyser un nombre réduit de questions en profondeur plutôt que de traiter superficiellement la totalité du sujet. On pouvait ici avoir une note tout à fait satisfaisante en se contentant de traiter correctement les deux tiers des questions.