SUJET Centrale/Mines

Problème 1 – Théorème de Borel

A. Une fonction en cloche

1. (a) On remarque que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1[$ par opérations. On raisonne par récurrence en posant le prédicat $\mathcal{P}(p)$: « il existe un polynôme $Q_p \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in]0,1[,\ g^{(p)}(x) = \dfrac{Q_p(x)}{(x(x-1))^{2p}} \mathrm{e}^{\frac{1}{x(x-1)}}$. »

   - $\mathcal{P}(0)$ est vrai avec $Q_0 = 1$.
   - Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(p-1)$ est vrai. On calcule alors pour $x \in]0,1[$,

$$g^{(p)}(x) = \left(g^{(p-1)}\right)'(x) = \frac{x^2(x-1)^2 Q'_{p-1}(x) - (2x-1)\left(2(p-1)x(x-1)+1\right)Q_{p-1}(x)}{(x(x-1))^{2p}} e^{\frac{1}{x(x-1)}}$$

   On pose alors $\boxed{Q_p = X^2(X-1)^2 Q'_{p-1} - (2X-1)(2(p-1)X(X-1)+1)Q_{p-1} \in \mathbb{R}[X]}$ qui permet d'établir la récurrence.

   On a montré que $\boxed{\text{pour tout } p \in \mathbb{N}\text{, il existe un polynôme } Q_p \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que}}$

$$\boxed{\forall x \in]0,1[,\ g^{(p)}(x) = \frac{Q_p(x)}{(x(x-1))^{2p}} \mathrm{e}^{\frac{1}{x(x-1)}}.}$$

   (b) Par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(p)$: « Q_p est de degré $3p-2$. »
   - $\mathcal{P}(1)$ est vrai avec $Q_1 = X^2(X-1)^2 \times 0 - (2X-1) \times 1 = 1 - 2X$.
   - Soit $p \geqslant 2$ tel que $\mathcal{P}(p-1)$ est vrai : Q_{p-1} est de degré $3p-5 \geqslant 1$.
     Alors $X^2(X-1)^2 Q'_{p-1}$ et $(2X-1)(2(p-1)X(X-1)+1)Q_{p-1}$ sont tous deux de degré $3p-2$. Soit $a \neq 0$ le cœfficient dominant de Q_{p-1}.
     Alors le cœfficient de degré $3p-2$ dans Q_p est $(3p-5)a - 4(p-1)a = (-p-1)a \neq 0$ donc Q_p est bien de degré $3p-2$, ce qui établit la récurrence.

   Bilan : $\boxed{\text{pour tout entier naturel } p \text{ non nul, } Q_p \text{ est de degré } 3p-2.}$

   Remarque : on a aussi, par la même occasion, que le cœfficient dominant de Q_p est $(-1)^p(p+1)!$.

2. (a) Soit $p \in \mathbb{N}$. La fonction polynomiale associée à Q_p étant continue en 0,

$$g^{(p)}(x) = Q_k(x) \times \frac{1}{(x(x-1))^{2p}} \mathrm{e}^{\frac{1}{x(x-1)}} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$$

   par croissances comparées. Donc $\boxed{g^{(p)}(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0.}$

   Un raisonnement analogue conduit aussi à $\boxed{g^{(p)}(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} 0.}$

   (b) La fonction g est bien nulle en dehors du segmet $[0,1]$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ par opérations et on a, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $g^{(p)}$ fonction nulle sur $\mathbb{R} \setminus [0,1]$.
   Donc, vu la question précédente, $g^{(p)}(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ et $g^{(p)}(x) \xrightarrow[x \to 1]{} 0$ (limites à gauche et à droite nulles).
   On peut donc appliquer de manière répétée le théorème de la limite de la dérivée à f puis à chacune de ses dérivées pour arriver (théorème du prolongement $\mathcal{C}^\infty$) à la conclusion que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Rappelons que le théorème de la limite de la dérivée demande d'avoir la continuité au point (ici 0 et 1), la dérivabilité partout ailleurs, ainsi qu'une limite (0 ici) au point (ici en 0 et 1).

Ainsi, $\boxed{g \in \mathcal{W}.}$

B. Une fonction en plateau

3. La bonne définition de h vient du fait que $C = \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$, ce qui résulte de la positivité améliorée : g est une fonction continue positive non nulle sur $[0,1]$ donc son intégrale est strictement positive.

   Soit G une primitive de la fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ (et en particulier continue) g. Alors $h : x \mapsto \frac{1}{C}\left(G(1) - G(x-1)\right)$ est $\boxed{\text{de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$

   De plus, comme g est nulle en dehors de $[0,1]$, si $x \leqslant 1$, $x-1 \leqslant 0$ et $h(x) = \frac{1}{C}\left(\int_{x-1}^0 g(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{0+C}{C} = 1$ et si $x \geqslant 2$, $x-1 \geqslant 1$ et $h(x) = \frac{-1}{C}\int_1^{x-1} g(t)\,\mathrm{d}t = 0$ donc $\boxed{h \text{ est constante sur }]-\infty,1] \text{ et sur } [2,\infty[.}$

4. (a) Comme h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ d'après la question précédente, par opérations, $\boxed{\varphi \text{ l'est.}}$

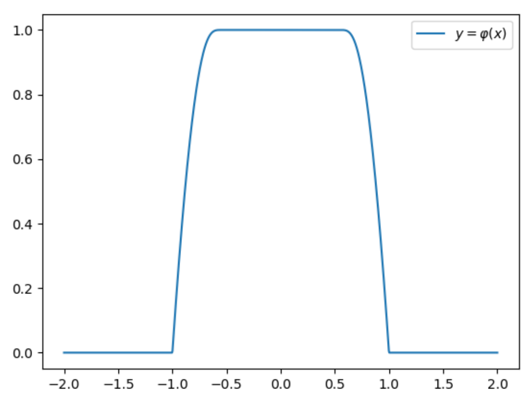
   Soit $p \geqslant 1$. En utilisant la formule de Leibniz, $\varphi^{(p)}(0) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} 2^k h^{(k)}(0)(-2)^{p-k} h^{(p-k)}(0)$.

   Or avec la question précédente, h est constante sur $]-\infty,1]$ donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $h^{(k)}(0)$ et finalement $\boxed{\varphi^{(p)}(0) = 0}$ (on ne peut pas avoir simultanément $k=0$ et $p-k=0$).

   (b) Si $x > 1$, $2x > 2$ donc $h(2x) = 0$ vu la question 3 et si $x < -1$, $-2x > 2$ donc $h(-2x) = 0$.

   Donc $\boxed{\varphi \text{ est nulle en dehors de } [-1,1].}$

   Le tracé sommaire se fait en remarquant que φ est paire, nulle sur $[1,+\infty[$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, et si $x \in [0,1]$, $-2x \in [-2,0]$ donc $h(-2x) = 1$ d'après 3, donc $\varphi(x) = h(2x)$ et donc $\varphi'(x) = -\frac{2}{C}g(x-1) \leqslant 0$ donc φ est décroissante sur $[0,1]$. De plus, sur $[-1/2,1/2]$, φ est constamment égale à 1. Cela permet d'avoir un graphe fidèle :



   (c) Pour tout $k \in [\![0,p-1]\!]$, $\left|\varphi^{(k)}\right|$ est continue sur le **segment** $[-1,1]$ donc est bornée et atteint ses bornes, donc elle admet un maximum. Puis comme $[\![0,p-1]\!]$ est fini, $\boxed{\lambda_p \text{ est bien défini.}}$

C. Le théorème de Borel

5. (a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\text{la classe } C^\infty \text{ de } g_n \text{ sur } \mathbb{R}}$ découle directement de celle de φ.

(b) Comme φ est nulle en dehors du segment $[-1,1]$ (question 4.b), $\boxed{\text{c'est le cas de } g_n \text{ en dehors de } \left[-\frac{1}{\beta_n}, \frac{1}{\beta_n}\right].}$

6. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Par la formule de Leibniz, $g_n^{(j)}(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\beta_n^i\varphi^{(i)}(\beta_n x)n(n-1)\cdots(n-(j-i)+1)x^{n-(j-i)}$ ce qui donne bien $\boxed{g_n^{(j)}(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\beta_n^i\varphi^{(i)}(\beta_n x)\frac{x^{n-j+i}}{(n-j+i)!}.}$

(b) On a alors $\boxed{g_n^{(j)}(0) = \displaystyle\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\beta_n^i\varphi^{(i)}(0)\frac{\delta_{n-j+i,0}}{(n-j+i)!} = 0}$ car $j < n$ donc $n-j+i$ ne peut être nul.

(c) Si $|x| > \dfrac{1}{\beta_n}$, alors $\beta_n x \in \mathbb{R}\setminus[-1,1]$. Or φ est constamment nulle sur $\mathbb{R}\setminus[-1,1]$ (réunion de deux intervalles ouverts), donc pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(i)}(\beta_n x) = 0$ et avec la question 6.a, $\boxed{g_n^{(j)}(x) = 0.}$ C'est encore vrai pour $x = \pm\dfrac{1}{\beta_n}$ par continuité de $g_n^{(j)}$ (question 5.a).

(d) Soit un réel x tel que $|x| \leqslant \dfrac{1}{\beta_n}$. Alors

$$\left|u_n g_n^{(j)}(x)\right| \leqslant |u_n|\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\beta_n^i\left|\varphi^{(i)}(\beta_n x)\right|\frac{|x|^{n-j+i}}{(n-j+i)!} \leqslant |u_n|\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\beta_n^i\lambda_n\frac{1}{\beta_n^{n-j+i}} = \frac{|u_n|\,\lambda_n}{\beta_n^{n-j}}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i} \leqslant \frac{4^{-n}\beta_n}{\beta_n^{n-j}}2^j.$$

Or $j \leqslant n-1$ et $\beta_n \geqslant 1$, donc $\boxed{\left|u_n g_n^{(j)}(x)\right| \leqslant \dfrac{2^{-2n+n-1}}{\beta_n^{n-j-1}} \leqslant 2^{-n-1}.}$

7. Soit $n, j \in \mathbb{N}$. D'après 6.b, si $j < n$, $g_n^{(j)}(0) = 0$.
Si $j \geqslant n$, toujours avec la formule de Leibniz, en tenant compte du fait que les dérivées de $x \mapsto x^n$ finissent par s'annuler, $g_n^{(j)}(0) = \displaystyle\sum_{i=j-n}^{j}\binom{j}{i}\beta_n^i\varphi^{(i)}(0)\frac{0^{n-j+i}}{(n-j+i)!} = \binom{j}{j-n}\beta_n^{j-n}\varphi^{(j-n)}(0) = \delta_{j,n}$ en utilisant 4.a et $\varphi(0) = 1$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour } n, j \in \mathbb{N},\ g_n^{(j)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq n \\ 1 & \text{si } j = n \end{cases}.}$

8. On applique le théorème de classe C^∞ des séries de fonctions.
H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n g_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ vu 5.a.
H2 Si $n \in \mathbb{N}$ et $|x| > \dfrac{1}{\beta_n}$, $u_n g_n(x) = 0$ vu 5.b (ou 6.c) donc $\sum u_n g_n(x)$ converge et si $|x| \leqslant \dfrac{1}{\beta_n}$, $0 \leqslant |u_n g_n(x)| \leqslant 2^{-n-1}$ par 6.d donc $\sum u_n g_n(x)$ converge absolument par comparaison à une série géométrique convergente, donc converge.
Finalement, $\sum u_n g_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
(On a aussi convergence normale en utilisant exactement le même argument que ci-dessous.)
H3 pour tout $j \in \mathbb{N}$, toujours en utilisant 6.c et 6.d, à partir du rang $j+1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\left|u_n g_n^{(j)}(x)\right| \leqslant 2^{-(n+1)}$ qui ne dépend pas de x et est un terme général de série (géométrique) convergente. Donc $\displaystyle\sum_{n>j} u_n g_n$ converge normalement, donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

On peut donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, appliquer le théorème pour la classe $\mathcal{C}^k$ quitte à sortir les termes de rang entre 0 et k qui sont en nombre fini et ne posent pas de problème de dérivation.

On en déduit que $\boxed{\sigma = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n g_n \text{ est bien définie, est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall\, j \in \mathbb{N},\ \ \sigma^{(j)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n g_n^{(j)}(0) = u_j}$ vu 7. Le théorème de Borel est démontré.

Problème 2 – Endomorphismes échangeurs

A. Quelques considérations en dimension 2

1. La trace étant un invariant de similitude linéaire, si u et $-u$ sont semblables, alors $\operatorname{tr} u = \operatorname{tr}(-u) = -\operatorname{tr} u$ donc $\boxed{\operatorname{tr} u = 0.}$

2. On applique le théorème de Cayley-Hamilton : le polynôme caractéristique $\chi_u = X^2 - (\operatorname{tr} u)X + \det u = X^2 - \delta^2$ est un polynôme annulateur, donc $u^2 - \delta^2 \mathrm{I}_E = 0$ et $\boxed{u^2 = \delta^2 \mathrm{I}_E.}$

   Comme $\chi_u = X^2 - \delta^2$, $\boxed{\operatorname{Sp} u = \{-\delta, \delta\}.}$

   Comme $\det u \neq 0$, $\delta \neq 0$ et les valeurs propres sont simples donc $\boxed{\text{les sous-espaces propres sont de dimension } 1.}$

3. Soient $x, y \in E$ vecteurs propres associés à δ et $-\delta$ respectivement, et $z = x + y$. Alors $u(z) = u(x) + u(y) = \delta(x - y)$. Comme les valeurs propres sont distinctes, (x, y) est libre, donc une base de E (autrement dit, u est diagonalisable) et $\det_{(x,y)}(z, u(z)) = \begin{vmatrix} 1 & \delta \\ 1 & -\delta \end{vmatrix} = -2\delta \neq 0$, donc $z \neq 0$, $\boxed{D = \operatorname{Vect} z \text{ est bien une droite et } u(D) \not\subset D}$ car $u(z) \notin D$.

   Soit $D' = \operatorname{Vect}(u(z)) = u(D)$. Comme $(z, u(z))$ est libre et contient deux vecteurs en dimension deux, c'est une base de E, donc $D \oplus D' = D \oplus u(D) = E$. De plus, $u(D) = D' \subset D'$ et $u(D') = u^2(D) = \delta^2 D = D \subset D$ donc $\boxed{u \text{ est échangeur.}}$

B. La condition (C1) implique (C2) et (C3)

4. Soient $B_1 = \begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix}$ et $A_1 = \begin{pmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ A & 0_p \end{pmatrix}$. On calcule $\boxed{A_1^2 = B_1^2 = 0_{n+p}.}$

   Donc $\boxed{M = B_1 + A_1 \text{ est une somme de deux matrices de carré nul.}}$

5. Comme $D^2 = I_{n+p}$, D est inversible et $D^{-1} = D$.

   Puis on calcule $\boxed{DMD^{-1} = -M}$ et on en déduit que $\boxed{M \text{ est semblable à } -M.}$

6. Comme $u(F) \subset G$ et $u(G) \subset F$, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $u(f_j) \in G$ et pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $u(g_j) \in F$, donc $\boxed{\text{la matrice de } u \text{ dans } \mathbf{B} \text{ a comme format celui de } M.}$

7. Dans le cas où ni F ni G est l'espace nul, la question précédente couplée aux questions 4 et 5 permet de montrer, en passant par les matrices dans la base **B**, que $\boxed{\text{si } u \text{ est échangeur, alors } \textbf{(C2)} \text{ et } \textbf{(C3)} \text{ sont vraies.}}$

   Dans le cas où F ou G est nul, supposons sans perte de généralité que ce soit F, alors $u(E) = u(G) \subset F = \{0_E\}$ donc $u = 0_{\mathcal{L}(E)} = -u = 0_{\mathcal{L}(E)} + 0_{\mathcal{L}(E)}$ vérifie bien **(C2)** et **(C3)**.

C. La condition (C2) implique (C1) : cas d'un automorphisme

8. Comme $f^2 = f \circ f = 0$, $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ donc $\dim \operatorname{Im} f \leqslant \dim \operatorname{Ker} f$. Avec le théorème du rang,

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f \leqslant 2 \dim \operatorname{Ker} f$$

donc $\boxed{\dim \operatorname{Ker} f \geqslant \dfrac{\dim E}{2}.}$

9. Tout $x \in E$ vérifie $u(x) = a(x) + b(x) \in \operatorname{Ker} a + \operatorname{Ker} b$ car $a^2 = b^2 = 0$, donc, comme u est surjectif, $E \subset \operatorname{Ker} a + \operatorname{Ker} b \subset E$, donc $E = \operatorname{Ker} a + \operatorname{Ker} b$.
Par ailleurs, si $x \in \operatorname{Ker} a \cap \operatorname{Ker} b$, $a(x) = b(x) = 0$ donc $u(x) = 0$ et comme u est un automorphisme, $x = 0$. Ainsi, $\operatorname{Ker} a \cap \operatorname{Ker} b = \{0\}$ et $\boxed{E = \operatorname{Ker} a \oplus \operatorname{Ker} b.}$

Donc $\dim E = \dim \operatorname{Ker} a + \dim \operatorname{Ker} b$, or, avec la question précédente, $\dim \operatorname{Ker} a \geqslant \dfrac{\dim E}{2}$ et $\dim \operatorname{Ker} b \geqslant \dfrac{\dim E}{2}$, c'est donc que $\dim \operatorname{Ker} a = \dim \operatorname{Ker} b = \dfrac{\dim E}{2}$. Le théorème du rang donne alors aussi $\dim \operatorname{Im} a = \dim \operatorname{Im} b = \dfrac{\dim E}{2}$ et comme $\operatorname{Im} a \subset \operatorname{Ker} a$ et $\operatorname{Im} b \subset \operatorname{Ker} b$, $\boxed{\operatorname{Ker} a = \operatorname{Im} a \text{ et } \operatorname{Ker} b = \operatorname{Im} b.}$

10. Soit $F = \operatorname{Ker} a$ et $G = \operatorname{Ker} b$. Alors, avec la question précédente, $E = F \oplus G$, $u(F) = (a+b)(\operatorname{Ker} a) = b(\operatorname{Ker} a) \subset \operatorname{Im} b = G$ et par symétrie $u(G) \subset F$: $\boxed{u \text{ est échangeur.}}$

D. Intermède : un principe de décomposition

11. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in E$, $v^k(x) = 0_E \implies v^{k+1}(x) = v\left(v^k(x)\right) = v(0_E) = 0_E$ donc $\operatorname{Ker} v^k \subset \operatorname{Ker} v^{k+1}$ et $\boxed{\text{la suite } \left(\operatorname{Ker} v^k\right)_{k \in \mathbb{N}} \text{ est croissante pour l'inclusion.}}$

12. $\left(\dim \operatorname{Ker} v^k\right)_k$ est donc une suite croissante d'entiers majorée par $\dim E$, elle est donc convergente puis stationnaire (à partir d'un certain rang, $\left|\dim \operatorname{Ker} v^k - \dim \operatorname{Ker} v^{k+1}\right| < 1$ donc $\dim \operatorname{Ker} v^k = \dim \operatorname{Ker} v^{k+1}$ car ce sont des entiers) et donc à partir d'un rang $p \in \mathbb{N}$, vu l'inclusion démontrée à la question précédente : $\operatorname{Ker} v^k = \operatorname{Ker} v^{k+1}$.

Finalement, $\boxed{\forall k \geqslant p,\ \operatorname{Ker} v^k = \operatorname{Ker} v^p.}$

On montre que $\boxed{\operatorname{Ker} v^p = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \operatorname{Ker} v^k}$ par double inclusion.

- On a déjà par définition de la réunion que $\operatorname{Ker} v^p \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \operatorname{Ker} v^k$.
- Réciproquement, si $k \in \mathbb{N}$, soit $k \leqslant p$ et $\operatorname{Ker} v^k \subset \operatorname{Ker} v^p$ par croissance, soit $k \geqslant p$ et $\operatorname{Ker} v^k = \operatorname{Ker} v^p$ par stationarité, donc $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \operatorname{Ker} v^k \subset \operatorname{Ker} v^p$.

On remarque que si p convient tout entier supérieur à p convient aussi, donc $\boxed{p \text{ peut être choisi parmi les entiers pairs.}}$

13. Par définition de p, comme $2p \geqslant p$, $\boxed{E_\lambda^c(f) = \operatorname{Ker}\left(v^{2p}\right).}$ Ensuite, par théorème du rang, on a déjà que

$$\dim E = \dim\left(E_\lambda^c(f)\right) + \dim\left(\operatorname{Im} f\right)$$

Puis, si $y \in E_\lambda^c(f) \cap \operatorname{Im} v^p$, on a $x \in E$ tel que $y = v^p(x)$ et $v^p(y) = v^{2p}(x) = 0_E$ donc $x \in \operatorname{Ker} v^{2p} = \operatorname{Ker} v^p$ et $y = v^p(x) = 0_E$ ce qui permet de conclure que $E_\lambda^c(f) \cap \operatorname{Im} v^p = \{0_E\}$ puis que $\boxed{E = E_\lambda^c(f) \oplus \operatorname{Im}(v^p).}$

$v^p = (f - \lambda \mathrm{I}_E)^p$ est un polynôme en f, donc commute avec f, donc le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre : $\boxed{E^c_\lambda(f) \text{ et } \mathrm{Im}(v^p) \text{ sont tous deux stables par } f.}$

14. Soit $y \in \mathrm{Im}\, v^p$ tel que $f(y) = \lambda y$. On a $x \in E$ tel que $y = v^p(x)$ et $f(y) = \left(v^{p+1} + \lambda v^p\right)(x) = \lambda v^p(x)$ donc $v^{p+1}(x) = 0_E$ donc $x \in \mathrm{Ker}\, v^{p+1} = \mathrm{Ker}\, v^p$ donc $y = v^p(x) = 0_E$.

    Ainsi $\boxed{\lambda \text{ n'est pas valeur propre de l'endomorphisme induit par } f \text{ sur } \mathrm{Im}(v^p).}$

    On suppose que $E^c_\lambda(f) \neq \{0_E\}$. Si μ est valeur propre de l'endomorphisme induit par f sur $E^c_\lambda(f)$ (il en existe car on travaille dans $\mathbb{C}$), alors on a $x \in E^c_\lambda(f)$ non nul tel que $f(x) = \mu x$, donc $v(x) = (\mu - \lambda)x$ puis $0_E = v^p(x) = (\mu - \lambda)^p x$ donc $(\mu - \lambda)^p = 0$ donc $\mu = \lambda$: $\boxed{\lambda \text{ est l'unique valeur propre de l'endomorphisme induit par } f \text{ sur } E^c_\lambda(f).}$

15. Si $\mathrm{Im}\, v^p = \{0_E\}$, on a bien $\mathrm{Im}\, v^p \subset E^c_\mu(f)$.

    Sinon, avec la question précédente, l'endomorphisme $\tilde{f}$ induit par f sur $\mathrm{Im}\, v^p$ n'admet pas λ comme valeur propre. Comme ses valeurs propres sont aussi des valeurs propres de f, il admet seulement μ comme valeur propre. Son polynôme caractéristique est donc $(X - \mu)^d$ où $d = \mathrm{rg}\, v^p$.

    Par le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\left(\tilde{f} - \mu \mathrm{I}_E\right)^d = 0$, donc $\mathrm{Im}\, v^p \subset \mathrm{Ker}\,(f - \mu \mathrm{I}_E)^d \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{Ker}\,(f - \mu \mathrm{I}_E)^k = E^c_\mu(f)$.

    Dans tous les cas, $\boxed{\mathrm{Im}\, v^p \subset E^c_\mu(f).}$

    Alors, avec la question 13, $E = E^c_\lambda(f) + \mathrm{Im}(v^p) \subset E^c_\lambda(f) + E^c_\mu(f) \subset E$ donc $E = E^c_\lambda(f) + E^c_\mu(f)$.
    Remarquons que si $E^c_\lambda(f) = \{0_E\}$ (cas où μ est la seule valeur propre de f) ou si $\mathrm{Im}\, v^p = \{0_E\}$ (cas où λ est la seule valeur propre de f, et alors nécessairement $E^c_\mu(f) = \{0_E\}$) , on a bien $E = E^c_\lambda(f) \oplus E^c_\mu(f)$.
    Sinon, en notant $\hat{f}$ l'endomorphisme induit par f sur $E^c_\lambda(f)$, en représentant f dans une base $\mathcal{B}$ à adaptée à la décomposition $E = E^c_\lambda(f) \oplus \mathrm{Im}(v^p)$ par une matrice diagonale par blocs : $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où A et B sont les matrices de $\tilde{f}$ et $\hat{f}$ dans les bases de $E^c_\lambda(f)$ et $\mathrm{Im}(v^p)$ constituant $\mathcal{B}$, respectivement. On obtient, avec un déterminant triangulaire par blocs, $\chi_f = \chi_{\tilde{f}} \chi_{\hat{f}} = (X - \lambda)^q (X - \mu)^d$ car on travaille dans $\mathbb{C}$ et on sait que $\tilde{f}$ n'admet que λ comme valeur propre et $\hat{f}$ n'admet que μ comme valeur propre (question 14 et hypothèse de cette question).
    On en déduit que l'ordre q de multiplicité de λ comme racine de f est exactement la dimension de $E^c_\lambda(f)$.
    Par symétrie, l'ordre de multiplicité d de μ comme racine de f est exactement la dimension de $E^c_\mu(f)$.

    Alors $\dim E^c_\lambda(f) + \dim E^c_\mu(f) = q + d = \deg \chi_f = \dim E$ ce qui permet de conclure que $\boxed{E = E^c_\lambda(f) \oplus E^c_\mu(f).}$

    Autre rédaction possible : remarquer que $E^c_\lambda(f) \cap E^c_\mu(f)$ est stable par f et que l'endomorphisme induit sur ce sous-espace ne peut avoir de valeur propre vu les hypothèses faites ici pour en déduire que $E^c_\lambda(f) \cap E^c_\mu(f) = \{0\}$.
    Autre rédaction possible : obtenir comme ci-dessus l'expression du polynôme caractéristique et utiliser le lemme de décomposition des noyaux (que l'on verra bientôt...) pour conclure directement.

$\mathcal{F}in$