Corrigé Devoir en Temps Limité n° 5

SUJET CCINP

Exercice – Résolution d'une équation fonctionnelle (CCINP PC 2021)

Partie I - Existence et unicité de la solution du problème (P)

I.1 - Existence de la solution

1. Soit $x \in]0,+\infty[$. $|\varphi_k(x)| \sim \dfrac{1}{k^2}$ qui est un terme général de série convergente.

   Par comparaison de séries à termes généraux positifs, $\sum \varphi_k(x)$ converge absolument donc converge.

   Ainsi, $\boxed{\text{la série de fonctions } \sum_{k\geqslant 0} \varphi_k \text{ converge simplement sur }]0,+\infty[.}$

2. Soit $x > 0$. On calcule à l'aide d'un télescopage

$$\varphi(x+1)+\varphi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k+1)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^k}{(x+k)^2} - \frac{(-1)^{k+1}}{(x+k+1)^2} \right) = \frac{1}{x^2} - 0$$

   Puis on calcule la limite de φ en $+\infty$ avec le théorème de la double limite.

   H1 $\forall\, k \in \mathbb{N},\ \ \varphi_k(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$

   H2 On veut une convergence uniforme de $\sum \varphi_k$ au moins au voisinage de $+\infty$.

   Elle peut s'obtenir avec le théorème spécial sur les séries alternées : en effet, si $x > 0$, $\left(\dfrac{1}{x+k}\right)_k$ décroît et tend vers 0. On peut alors écrire $\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{(x+n+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^2}$ qui ne dépend pas de x et tend vers 0. Donc la suite des restes converge uniformément vers la fonction nulle ce qui donne bien la convergence uniforme de $\sum \varphi_k$ sur $]0,+\infty[$.

   Autre rédaction possible : on peut s'intéresser à la convergence normale. On remarque que φ_0 n'est pas bornée mais si $k \geqslant 1$, $\forall x > 0,\ \ |\varphi_k(x)| \leqslant \dfrac{1}{k^2}$ qui est un terme général de série convergente indépendant de x donc $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \varphi_k$ converge normalement sur $]0,+\infty[$ et converge donc uniformément. Comme par ailleurs $\varphi_0(x) = \dfrac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, on peut alors appliquer le théorème de la double limite à $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \varphi_k$.

   On conclut alors que $\varphi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

   Donc $\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est une solution de } (P).}$

I.2 - Unicité de la solution

3. On calcule, pour f solution de (P) et $x > 0$, par télescopage

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(f(x+k+1)+f(x+k)\right) = \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^k f(x+k) - (-1)^{k+1} f(x+k+1)\right) \\ &= f(x) - (-1)^{n+1} f(x+n+1)\end{aligned}$$

donc $\boxed{f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.}$

4. Si f est solution de (P), on a aussi $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, donc en faisant $n \to +\infty$ dans la question précédente, comme $\left((-1)^{n+1}\right)_n$ est bornée, $\forall\, x > 0,\ \ f(x) = \varphi(x)$.
Réciproquement, on a vu en 2 que φ est solution de (P).
Bilan : $\boxed{\varphi \text{ est l'unique solution de } (P).}$

Partie II - Etude de la solution du problème (P)

5. Le fait de se placer sur $[\varepsilon, +\infty[$ permet, comme en 2, d'avoir une convergence normale de $\sum_{k \geqslant 0} \varphi_k$ car on peut écrire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \geqslant \varepsilon$, $|\varphi_k(x)| \leqslant \frac{1}{(\varepsilon+k)^2}$ qui est un terme général de série convergente (équivalent à $\frac{1}{k^2}$), indépendant de x (on a même plus exactement $\|\varphi_k\|_{\infty,[\varepsilon,+\infty[} = \frac{1}{(\varepsilon+k)^2}$)
d'où la $\boxed{\text{convergence uniforme de } \sum_{k \geqslant 0} \varphi_k \text{ sur } [\varepsilon, +\infty[.}$
Mais l'argument avec la majoration du reste de la question 2 permet de conclure plus précisément que $\boxed{\sum_{k \geqslant 0} \varphi_k \text{ converge uniformément sur }]0, +\infty[.}$

6. On utilise le théorème de continuité. Notons que la continuité est aussi une conséquence de la question suivante (qui n'utilise pas celle-ci.)
H1 $\forall\, k \in \mathbb{N},\ \ \varphi_k \in \mathcal{C}^0\left(\mathbb{R}_*^+\right)$ par opérations.
H2 $\sum \varphi_k$ converge uniformément sur tout $[\varepsilon, +\infty[$ pour $\varepsilon > 0$ d'après la question précédente, et même sus $]0, +\infty[$ comme vu par ailleurs.
Donc $\boxed{\varphi \in \mathcal{C}^0\left(\mathbb{R}_*^+\right).}$
Par ailleurs, par continuité, $\varphi(x+1) \xrightarrow[x \to 0]{} \varphi(1) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$, donc, comme pour tout $x > 0$, $\varphi(x) = \frac{1}{x^2} - \varphi(x+1)$,
$\boxed{\varphi(x) \sim \frac{1}{x^2} \text{ au voisinage de } 0.}$
Autre raisonnement possible (mais pas celui voulu par l'énoncé) : le théorème de la double limite s'applique aussi au voisinage de 0 pour $\sum_{k \geqslant 1} \varphi_k$ qui tend vers le réel (fini) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$, donc

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_k(x) = \frac{1}{x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{1}{x^2}.$$

7. On utilise le théorème de classe $\mathcal{C}^1$.
H1 $\forall\, k \in \mathbb{N},\ \ \varphi_k \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}_*^+\right)$ par opérations.
H2 $\sum \varphi_k$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ (et même uniformément mais ce n'est pas utile).

H3 $\forall k \in \mathbb{N},\ \varphi_k' : x \mapsto \dfrac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$ donc exactement comme avec φ, on montre en utilisant la théorème spécial (avec pour tout $x>0$, $\left(\dfrac{1}{(x+k)^3}\right)_k$ qui tend vers 0 en décroissant) qu'il y a convergence uniforme de $\sum_{k\geqslant 0} \varphi_k'$ sur $]0,+\infty[$, ou qu'il y a convergence normale de $\sum_{k\geqslant 1} \varphi_k'$ sur $]0,+\infty[$ ou qu'il y a convergence normale de $\sum_{k\geqslant 0} \varphi_k'$ sur tout intervalle $[\varepsilon,+\infty[$ avec $\varepsilon>0$.

Donc $\boxed{\varphi \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}_*^+\right) \text{ et } \varphi' : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}.}$

8. Avec le théorème sur les séries alternées qui s'applique bien à φ', on a que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi'(x)$ est du même signe son premier terme $\dfrac{-2}{x^3} \leqslant 0$ donc $\boxed{\varphi \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_*^+.}$.

9. Par décroissance, si $x>1$, comme $x-1<x<x+1$, on a $\dfrac{1}{x^2} = \varphi(x)+\varphi(x+1) \leqslant 2\varphi(x)$ et $\dfrac{1}{(x-1)^2} = \varphi(x-1)+\varphi(x) \geqslant 2\varphi(x)$ donc $\boxed{\dfrac{1}{x^2} \leqslant 2\varphi(x) \leqslant \dfrac{1}{(x-1)^2}.}$

Par encadrement, $2x^2\varphi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ donc $\boxed{\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x^2}.}$

Problème – Les matrices de Kac (CCINP PSI 2020)

Partie I – La dimension 3

1.

$$\begin{aligned}
\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ -2 & X & -2 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} X-2 & X-2 & X-2 \\ -2 & X & -2 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} && L_1 \leftarrow L_1+L_2+L_3 \\
&= \begin{vmatrix} X-2 & 0 & 0 \\ -2 & X+2 & 0 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} && \begin{matrix} C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \end{matrix} \\
&= (X-2)(X+2)X,
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\chi_A = (X-2)(X+2)X.}$

2. Ainsi, Sp $A = \{0,-2,2\}$: A possède trois valeurs propres en dimension 3 donc $\boxed{\text{est diagonalisable}}$ et $\boxed{\text{les sous-espaces propres sont des droites.}}$

3.

$$\begin{aligned}\chi_B = \begin{vmatrix} X & 1 & 0 \\ -2 & X & 2 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} X & 1 & 0 \\ 0 & X & 2 \\ X & -1 & X \end{vmatrix} & C_1 \leftarrow C_1 + C_3 \\ &= \begin{vmatrix} X & 1 & 0 \\ 0 & X & 2 \\ 0 & -2 & X \end{vmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ &= X \begin{vmatrix} X & 2 \\ -2 & X \end{vmatrix} \\ &= X(X^2+4)\end{aligned}$$

donc $\chi_B = X\left(X^2+4\right) = X(X+2\mathrm{i})(X-2\mathrm{i}).$ On a alors

$$\mathrm{i}\chi_B(\mathrm{i}X) = \mathrm{i}\left(\mathrm{i}X\left(-X^2+4\right)\right) = X\left(X^2-4\right) = \chi_A,$$

comme désiré.

---

4. On a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}} B = \{0\}$ donc B n'est pas $\mathbb{R}$-diagonalisable sinon elle serait nulle (Autre argument : χ_B n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.).

 $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} = \{0, 2\mathrm{i}, -2\mathrm{i}\}$ donc B possède trois valeurs propres en dimension 3, donc est $\mathbb{C}$-diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites sur $\mathbb{R}$ comme sur $\mathbb{C}$ (dans tous les cas, les valeurs propres sont simples.)

---

5. On se souvient que multiplier à gauche (respectivement à droite) revient à multiplier les ligne (respectivement les colonnes) par le cœfficient diagonal correspondante. On a alors

$$\begin{aligned}D^{-1}AD &= \begin{pmatrix} 1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} & 0 \\ -2\mathrm{i} & 0 & 2\mathrm{i} \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

 donc $D^{-1}AD = -\mathrm{i}B.$

Partie II – Étude d'un endomorphisme

Objectifs

6. Considérons donc des scalaires $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tels que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = 0$. Si, par l'absurde, l'un des λ_k est non nul, soit k l'indice maximal tel que $\lambda_k \neq 0$. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_0(\sin(x))^n + \lambda_1(\sin(x))^{n-1}\cos(x) + \cdots + \lambda_k(\cos(x))^k(\sin(x))^{n-k} = 0.$$

Pour tout $x \not\equiv 0\ [\pi]$, on a $\sin(x) \neq 0$ et on obtient

$$\forall x \not\equiv 0\ [\pi]\,, \quad \lambda_0(\sin(x))^{n-k} + \lambda_1(\sin(x))^{n-k-1}\cos(x) + \cdots + \lambda_k(\cos(x))^k = 0.$$

En prenant la limite quand $x \to 0$ on obtient $\lambda_k = 0$, ce qui est contradictoire.

C'est donc que tous les scalaires λ_0, ..., λ_n sont nuls, donc $\boxed{\text{la famille } (f_0, \ldots, f_n) \text{ est libre.}}$

On aurait aussi pu raisonner par récurrence finie en faisant tendre x vers 0 puis en divisant par $\sin x$ n fois, mais la rédaction est moins élégante.
Comme, de plus, la famille $(f_0, \ldots, f_n)$ engendre V_n, on en déduit que c'est une base de V_n. On a alors $\boxed{\dim V_n = \text{taille}\,((f_0, \ldots, f_n)) = n + 1.}$

7. Un simple calcul de dérivée de produit donne $\boxed{f_k' \in V_n.}$ (Il doit apparaître dans la copie !)

   $\varphi_n : f \mapsto f'$ étant linéaire, la remarque précédente permet de conclure que $\varphi_n \in \mathcal{L}(V_n)$ car $(f_0, \ldots, f_n)$ est une base de V_n.
   Finalement, le correcteur ne peut échapper au calcul de la dérivée de f_k' pour déterminer la matrice de φ_n de $\varphi_n(f_k) = -kf_{k-1} + (n-k)f_{k+1}$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\varphi_n(f_0) = nf_1$ et $\varphi_n(f_n) = -nf_{n-1}$.

   On remplit alors B_n par colonnes pour obtenir $\boxed{B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & & & & \\ n & 0 & -2 & & & (0) & \\ & n-1 & 0 & -3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & (0) & & 2 & 0 & -n \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}}.$

8. On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_k(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-k)x}$ ce qui, via la formule de De Moivre, donne bien $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = (\cos x + \mathrm{i}\sin x)^k(\cos x - \mathrm{i}\sin x)^{n-k}.}$

9. On développe avec la formule du binôme de Newton, pour $k \in [\![0, n]\!]$ et $x \in \mathbb{R}$, (règle d'or : toujours prendre des indices différents dans un produit de deux sommes !)

$$\begin{aligned}(\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x))^k(\cos(x) - \mathrm{i}\sin(x))^{n-k} \\ = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}(\cos(x))^j(\mathrm{i}\sin(x))^{k-j} \cdot \sum_{\ell=0}^{n-k}\binom{n-k}{\ell}(\cos(x))^\ell(-\mathrm{i}\sin(x))^{n-k-\ell},\end{aligned}$$

   donc $g_k(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k}\sum_{\ell=0}^{n-k}(-1)^{n-k-\ell}\mathrm{i}^{n-j-\ell}\binom{k}{j}\binom{n-k}{\ell}\underbrace{(\cos(x))^{\ell+j}(\sin(x))^{n-(\ell+j)}}_{=f_{\ell+j}(x)}$ (on a bien toujours $\ell + j \in [\![0, n]\!]$),

   donc $\boxed{g_k \in V_n.}$

10. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Avec la définition de g_k, on a $g_k' = \mathrm{i}(2k-n)g_k = \varphi_n(g_k)$. Comme de plus g_k n'est pas le fonction nulle (elle est même jamais nulle, de module 1 !), on en déduit que tous les $\mathrm{i}(2k-n)$ sont valeurs propres de φ_n : cela constitue $n+1$ valeurs propres distinctes en dimension $n+1$ (question 6), ce qui rend $\boxed{\varphi_n \text{ diagonalisable}}$ (et c'est cohérent avec le cas $n = 2$ de la première partie).

    Les sous-espaces propres sont des droites, et plus précisément, pour tout $0 \leqslant k \leqslant$, $\boxed{E_{\mathrm{i}(2k-n)}(\varphi_n) = \mathrm{Vect}(g_k).}$

11. $\boxed{\varphi_n \text{ est un automorphisme}}$ si et seulement si 0 n'est pas valeurs propre si et seulement si pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $n \neq 2k$ $\boxed{\text{si et seulement si } n \text{ est impair.}}$

12. $\text{Ker}(B_n - \text{i}nI_{n+1}) = E_{\text{i}(2n-n)}(B_n)$ est engendré par le vecteur colonne représentant g_n dans $(f_0, \dots, f_n)$, avec $g_n = (\cos + \text{i}\sin)^n = \sum_{m=0}^{n} \text{i}^{n-m} \binom{n}{m} f_m$ donc $\boxed{\text{Ker}(B_n - \text{i}nI_{n+1}) = \text{Vect} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}.}$

Partie III – Les matrices de Kac de taille $n+1$

Objectifs

13. Comme déjà dit, multiplier à gauche (respectivement à droite) revient à multiplier les ligne (respectivement les colonnes) par le cœfficient diagonal correspondante.

    Donc, si $(k, \ell) \in [\![1, p]\!]^2$. $\boxed{[DM]_{k\ell} = d_{kk} m_{k\ell} \text{ et } [DM]_{k\ell} = d_{\ell\ell} m_{k\ell}.}$

    Cela se démontre naturellement avec la formule du produit matriciel.

    Par exemple, $[DM]_{k\ell} = \sum_{j=1}^{p} d_{kj} m_{j\ell} = d_{kk} m_{k\ell}$.

---

14. En appliquant la règle trouvée à la question précédente et le fait que l'inverse d'une matrice diagonale est la matrice diagonale dont les cœfficients diagonaux sont inversés, on obtient bien $\boxed{D_n^{-1} A_n D_n = -\text{i}B_n.}$

    Alors, par similitude $\chi_{A_n} = \chi_{-\text{i}B_n} = \det(XI_{n+1} + \text{i}B_n) = \det(-\text{i}(\text{i}XI_{n+1} - B_n)) = \boxed{(-\text{i})^{n+1} \chi_{B_n}(\text{i}X) = \chi_{A_n}}$ (et c'est de nouveau cohérent avec la première partie).

---

15. Ainsi, $\boxed{\text{Sp}\, A_n = \left\{ \frac{\lambda}{\text{i}},\ \lambda \in \text{Sp}\, B_n \right\} = \{2k - n,\ k \in [\![0, n]\!]\}}$ d'après la question 10 : B_n possède $n+1$ valeurs propres distinctes en dimension $n+1$ donc $\boxed{B_n \text{ est diagonalisable}}$ et ses sous-espaces propres sont des droites. Autre argument : vu la question précédente, par similitude, $-\text{i}B_n$ est diagonalisable, donc B_n l'est aussi.

    De plus, comme $A_n = -\text{i}D_n B_n D_n^{-1}$, si, pour $k \in [\![1, n]\!]$ $X_k = \text{Vect} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$ vecteur propre de B_n associé à la valeur propre $\text{i}n$ trouvé à la question 10, alors, en posant $Y_k = D_n X_k = \begin{pmatrix} \text{i}^0 q_0 \\ \text{i}^1 q_1 \\ \vdots \\ \text{i}^n q_n \end{pmatrix} = \text{i}^{n-1} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \neq 0$, $A_n Y_k = -\text{i}D_n B_n X_k = nD_n X_k = nY_k$ donc la droite vectorielle

$$\boxed{\text{Ker}(A_n - nI_{n+1}) = E_n(A_n) = \text{Vect}\, Y_k = \text{Vect} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}.}$$

$\mathcal{F}in$