DEVOIR EN TEMPS LIMITÉ N° 5

À LIRE ATTENTIVEMENT

- Les copies mal présentées, illisibles ou dans lesquelles les réponses aux questions ne seraient pas encadrées, et dans lesquelles il n'y aurait pas de trait tiré entre chaque question (ou sous-question) sur la largeur de la feuille seront **fortement sanctionnées, voire non corrigées**.
- Présentation et rédaction (concise, mais complète) sont une part importante de la notation.
- Il est IMPÉRATIF de respecter l'ordre des question (quitte à laisser des blancs pour « plus tard ».)
- Il est IMPÉRATIF d'utiliser un brouillon. Seules les questions abouties figurent sur la copie.
- Tout départ avant la fin des 4 heures n'est pas autorisé.
- LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISÉE.
- **Deux sujets au choix : type CCINP ou (exclusif) type CENTRALE/MINES (un peu moins ardu qu'au précédent devoir).**
  Inutile de traiter des questions dans les deux sujets, vous n'aurez pas les points.

SUJET CCINP

Exercice – Résolution d'une équation fonctionnelle

Dans cet exercice, on souhaite déterminer les fonctions $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ vérifiant les relations :

$$f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0 \text{ et } \forall x\in]0,+\infty[,\quad f(x+1)+f(x)=\frac{1}{x^2}.\qquad (P)$$

Partie I - Existence et unicité de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on démontre que le problème (P) admet une unique solution et on détermine une expression de celle-ci sous la forme d'une série de fonctions.

I.1 - Existence de la solution

Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on définit la fonction $\varphi_k:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ par $\forall x\in]0,+\infty[,\quad \varphi_k(x)=\dfrac{(-1)^k}{(x+k)^2}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 0}\varphi_k$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

Dans tout les reste de cet exercice, on note $\varphi:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ la somme de la série $\sum_{k\geqslant 0}\varphi_k$.

2. Montrer que la fonction φ est une solution de (P).

I.2 - Unicité de la solution

3. Montrer que si $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ est une solution de (P), alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$\forall x\in]0,+\infty[,\quad f(x)=(-1)^{n+1}f(x+n+1)+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

4. En déduire que la fonction φ est l'unique solution de (P).

Partie II - Etude de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on étudie quelques propriétés de l'unique solution $\varphi:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ du problème (P).

5. Soit $\varepsilon>0$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 0}\varphi_k$ converge uniformément sur $[\varepsilon,+\infty[$.

6. Montrer que la fonction φ est continue sur $]0,+\infty[$. En utilisant le fait que φ est une solution du problème (P), en déduire un équivalent simple de φ au voisinage de 0^+.
7. Justifier que la fonction φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et donner une expression de $\varphi'(x)$ sous forme de somme de série.
8. En déduire que la fonction φ est décroissante sur $]0,+\infty[$.
9. En utilisant le résultat de la question précédente et la relation (P), montrer que :

$$\forall x\in]1,+\infty[,\quad \frac{1}{x^2}\leqslant 2\varphi(x)\leqslant\frac{1}{(x-1)^2}.$$

En déduire un équivalent de φ en $+\infty$.

Problème – Les matrices de Kac

Notations

- Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels et $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients complexes.
- Dans tout ce problème, les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ seront notés en colonnes.
- La lettre i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $i^2=-1$.
  On s'interdira d'utiliser cette lettre pour tout autre usage !

Objectifs

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés spectrales de deux matrices $A_n\in\mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et $B_n\in\mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ introduites par Mark Kac au milieu du XX^e siècle. Ces liens ont été mis en évidence par Alan Edelman et Eric Kostlan au début des années 2000.

Ce problème est divisé en trois parties largement indépendantes. La **Partie I** introduit les matrices de Kac en taille 3 et met en évidence les propriétés qui seront démontrées en taille quelconque dans les **Parties II** et **III**.

Partie I – La dimension 3

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\2&0&2\\0&1&0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0&-1&0\\2&0&-2\\0&1&0\end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_A=\det(XI_3-A)$ de A et le décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
2. En déduire que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Donner la liste des valeurs propres de A et la dimension des espaces propres correspondants. *On ne demande pas de déterminer les espaces propres de A dans cette question.*
3. Déterminer le polynôme caractéristique χ_B de B et le décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$. Vérifier que $\chi_A(X)=i\chi_B(iX)$.
4. La matrice B est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Donner la liste des valeurs propres réelles puis complexes de B et la dimension des espaces propres sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ correspondants. *On ne demande pas de déterminer les espaces propres de B dans cette question.*

On considère $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&i&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

5. Exprimer $D^{-1}AD$ à l'aide de la matrice B.

Partie II – Étude d'un endomorphisme

Objectifs

Dans cette partie, on introduit la matrice B_n et on en étudie ses propriétés spectrales à l'aide d'un endomorphisme de dérivation.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. Pour $k \in [\![0,n]\!]$, on note $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \cos^k(x)\sin^{n-k}(x).$$

On note V_n le $\mathbb{C}$-espace vectoriel défini par $V_n = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(f_0, f_1, \ldots, f_n) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k,\ (\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \right\}$.

6. Montrer que la famille $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est libre. En déduire la dimension de l'espace vectoriel complexe V_n.
7. Pour $k \in [\![0,n]\!]$, montrer que $f_k' \in V_n$. En déduire que :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_n : & V_n & \longrightarrow & V_n \\ & f & \longmapsto & \varphi_n(f) = f' \end{array}$$

définit un endomorphisme de V_n et que sa matrice B_n dans la base $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est la matrice :

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & & & (0) \\ n & 0 & -2 & & & \\ & n-1 & 0 & -3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & 2 & 0 & -n \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Pour $k \in [\![0,n]\!]$, on note $g_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = \mathrm{e}^{i(2k-n)x}$.

8. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = (\cos x + i \sin x)^k (\cos x - i \sin x)^{n-k}$.
9. En déduire que $\forall k \in [\![0,n]\!], \quad g_k \in V_n$.
10. Pour $k \in [\![0,n]\!]$, calculer g_k'. En déduire que φ_n est diagonalisable. Donner la liste des valeurs propres complexes de φ_n et décrire les espaces propres correspondants.
11. Pour quelles valeurs de n l'endomorphisme φ_n est-il un automorphisme de V_n ?
12. Écrire la décomposition de g_n dans la base $(f_0, \ldots, f_n)$ et en déduire que $\mathrm{Ker}(B_n - inI_{n+1}) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$, où pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on note $q_k = i^{n-k}\binom{n}{k}$.

Partie III – Les matrices de Kac de taille $n+1$

Objectifs

Dans cette partie, on introduit la matrice A_n, On utilise les résultats de la **Partie II** pour étudier les propriétés spectrales de la matrice A_n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. On note A_n la matrice tridiagonale $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & & (0) \\ n & 0 & 2 & & & \\ & n-1 & 0 & 3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & 2 & 0 & n \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

Le terme général $a_{k,\ell}$ de la matrice A_n vérifie donc :

- $a_{k,k+1} = k$ si $1 \leqslant k \leqslant n$,
- $a_{k,k-1} = n-k+2$ si $2 \leqslant k \leqslant n+1$,
- $a_{k,\ell} = 0$ pour tous les couples $(k,\ell) \in [\![1,n+1]\!]^2$ non couverts par les formules précédentes.

On note enfin $D_n \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ la matrice diagonale dont le k-ième terme diagonal d_{kk} vérifie $d_{kk} = i^{k-1}$.

13. Soient $M = (m_{k\ell})_{1 \leqslant k,\ell \leqslant p} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice de taille p et $D = (d_{k\ell})_{1 \leqslant k,\ell \leqslant p} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice diagonale de taille p. Exprimer le terme général de la matrice DM en fonction des $m_{k\ell}$ et des $d_{k\ell}$, puis exprimer le terme général de la matrice MD en fonction des $m_{k\ell}$ et des $d_{k\ell}$.

14. Montrer que $D_n^{-1} A_n D_n = -iB_n$ où B_n est la matrice déterminée dans la **Partie II**. En déduire une relation simple entre $\chi_{A_n}(X)$ et $\chi_{B_n}(iX)$, où χ_{A_n} et χ_{B_n} sont les polynômes caractéristiques respectifs de A_n et B_n.
15. En déduire, à l'aide de la **Partie II**, que A_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, que les valeurs propres de A_n sont les entiers de la forme $2k-n$ pour $k \in [\![0,n]\!]$ et que $\mathrm{Ker}(A_n - nI_{n+1}) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$, où pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on note $p_k = \binom{n}{k}$.

SUJET Centrale/Mines

Problème 1 – Théorème de Borel

Le but de ce problème est de construire une fonction de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ dont on a fixé a priori les valeurs des dérivées successives en 0. On note $\mathscr{W}$ l'ensemble des fonctions C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ nulles en dehors d'un segment (qui dépend de la fonction).

A. Une fonction en cloche

Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{1}{x(x-1)}} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. (a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $Q_p \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in]0,1[,\ g^{(p)}(x) = \dfrac{Q_p(x)}{(x(x-1))^{2p}} \mathrm{e}^{\frac{1}{x(x-1)}}$.
   Pour tout entier $p \geqslant 1$, exprimer Q_p en fonction de Q_{p-1} et Q_{p-1}'.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel p non nul, Q_p est de degré $3p-2$.
2. (a) Montrer que pour tout entier naturel p, $\lim\limits_{x \to 0^+} g^{(p)}(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} g^{(p)}(x) = 0$.
   (b) En déduire que $g \in \mathscr{W}$.

B. Une fonction en plateau

Soit h la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout réel x, par $h(x) = \dfrac{\int_{x-1}^{1} g(t)dt}{\int_0^1 g(t)dt}$.

3. Montrer que h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, constante sur $]-\infty, 1]$ et sur $[2, \infty[$.
4. Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = h(2x)h(-2x)$ pour tout réel x.
   (a) Montrer que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi^{(p)}(0) = 0$ pour tout $p \geqslant 1$.
   (b) Montrer que φ est nulle en dehors de $[-1,1]$ et tracer sommairement l'allure de son graphe.
   (c) Justifier pour tout entier naturel p non nul l'existence du réel $\lambda_p = \max\limits_{k \in \{0,\ldots,p-1\}} \max\limits_{x \in [-1,1]} \left|\varphi^{(k)}(x)\right|$.

C. Le théorème de Borel

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe. On définit pour tout entier naturel n une fonction g_n par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g_0(x) = \varphi(x) \quad \text{et si } n \geqslant 1 \quad g_n(x) = \frac{x^n}{n!}\varphi(\beta_n x)$$

où $\beta_n = \max(1, 4^n |u_n| \lambda_n)$.

5. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, la fonction g_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que g_n est nulle hors du segment $\left[-\dfrac{1}{\beta_n}, \dfrac{1}{\beta_n}\right]$.
6. Soit n et j des entiers naturels tels que $j < n$.
   (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad g_n^{(j)}(x) = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \beta_n^i \varphi^{(i)}(\beta_n x) \dfrac{x^{n-j+i}}{(n-j+i)!}$.

(b) En déduire que $g_n^{(j)}(0)=0$.

(c) Montrer que, pour tout réel x tel que $|x|\geqslant \dfrac{1}{\beta_n}$, on a $g_n^{(j)}(x)=0$.

(d) Montrer que, pour tout réel x tel que $|x|\leqslant \dfrac{1}{\beta_n}$, on a $\left|u_n g_n^{(j)}(x)\right|\leqslant 2^{-(n+1)}$.

7. Déduire des questions précédentes que pour $n,j\in\mathbb{N}$, $g_n^{(j)}(0)=\begin{cases}0 & \text{si } j\neq n\\ 1 & \text{si } j=n\end{cases}$

8. En considérant $\sigma=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}u_n g_n$, montrer qu'il existe une fonction f de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall j\in\mathbb{N}, f^{(j)}(0)=u_j$ (Théorème de Borel).

Problème 2 – Endomorphismes échangeurs

Dans tout le problème, les espaces vectoriels considérés ont $\mathbb{C}$, le corps des complexes, pour corps de base.

Étant donnés deux entiers naturels n et p non nuls, on note $M_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{C}$ (et $0_{n,p}$ sa matrice nulle) et $M_n(\mathbb{C})$ celui des matrices carrées à n lignes et à coefficients dans $\mathbb{C}$ (et 0_n sa matrice nulle).

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On note $\mathscr{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E.

Un endomorphisme u de E est dit **échangeur** lorsqu'il existe des sous-espaces vectoriels F et G de E tels que

$$E=F\oplus G,\ u(F)\subset G \ \text{ et }\ u(G)\subset F$$

Étant donnés deux endomorphismes u et v de E, on dit que v est **semblable** à u lorsqu'il existe un automorphisme φ de E tel que $v=\varphi\circ u\circ\varphi^{-1}$. On notera que dans ce cas $u=\varphi^{-1}\circ v\circ(\varphi^{-1})^{-1}$, si bien que u est semblable à v.

On dit que u est **de carré nul** lorsque u^2 est l'endomorphisme nul de E. On dit que u est **nilpotent** lorsqu'il existe un entier naturel $n\geqslant 1$ tel que $u^n=0$.

Une matrice $A\in M_n(\mathbb{C})$ est dite **de carré nul** lorsque $A^2=0_n$.

L'objectif du problème est d'établir, pour un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, l'équivalence entre les conditions suivantes :

(C1) L'endomorphisme u est échangeur.

(C2) Il existe $a\in\mathscr{L}(E)$ et $b\in\mathscr{L}(E)$, tous deux de carré nul, tels que $u=a+b$.

(C3) Les endomorphismes u et $-u$ sont semblables.

Chacune des parties A et B est indépendante des autres. Les résultats de la partie D sont essentiels au traitement des parties E et F.

A. Quelques considérations en dimension 2

On se donne ici un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2 et un endomorphisme u de E.

1. Montrer que si u vérifie la condition **(C3)** alors u est de trace nulle.

Jusqu'à la fin de cette partie, on suppose u de trace nulle et de déterminant non nul.
On choisit un nombre complexe δ tel que $\delta^2=-\det u$.

2. Montrer que $u^2=\delta^2 \mathrm{I}_E$, déterminer le spectre de u et préciser la dimension des sous-espaces propres de u.
3. Expliciter, à l'aide de vecteurs propres de u, une droite vectorielle D telle que $u(D)\not\subset D$ et en déduire que u est échangeur.

B. La condition (C1) implique (C2) et (C3)

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Soient $A\in M_{p,n}(\mathbb{C})$ et $B\in M_{n,p}(\mathbb{C})$. On considère dans $M_{n+p}(\mathbb{C})$ la matrice $M=\begin{pmatrix}0_n & B\\ A & 0_p\end{pmatrix}$.

4. Calculer le carré de la matrice $\begin{pmatrix}0_n & B\\ 0_{p,n} & 0_p\end{pmatrix}$ de $M_{n+p}(\mathbb{C})$. Montrer ensuite que M est la somme de deux matrices de carré nul.

5. On considère dans $M_{n+p}(\mathbb{C})$ la matrice diagonale par blocs $D=\begin{pmatrix}I_n & 0_{n,p}\\ 0_{p,n} & -I_p\end{pmatrix}$.
Montrer que D est inversible, calculer D^{-1} puis DMD^{-1}, et en déduire que M est semblable à $-M$.

Jusqu'à la fin de cette partie, on se donne un endomorphisme u d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie.
On suppose que u est échangeur et on se donne donc une décomposition $E=F\oplus G$ dans laquelle F et G sont des sous-espaces vectoriels vérifiant $u(F)\subset G$ et $u(G)\subset F$.

6. On suppose ici F et G tous deux non nuls.
On se donne une base $(f_1,\dots,f_n)$ de F et une base $(g_1,\dots,g_p)$ de G.
La famille $\mathbf{B}=(f_1,\dots,f_n,g_1,\dots,g_p)$ est donc une base de E.
Compte-tenu des hypothèses, décrire la forme de la matrice u dans $\mathbf{B}$.
7. Déduire des questions précédentes que u vérifie **(C2)** et **(C3)**.
On n'oubliera pas de considérer le cas où l'un des sous-espaces F ou G est nul.

C. La condition (C2) implique (C1) : cas d'un automorphisme

Dans cette partie, u désigne un *automorphisme* d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe deux endomorphismes a et b de E tels que $u=a+b$ et $a^2=b^2=0$.

8. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2=0$. Comarer $\operatorname{Ker} f$ à $\operatorname{Im} f$ et en déduire $\dim\operatorname{Ker} f\geqslant\dfrac{\dim E}{2}$.
9. Démontrer que $E=\operatorname{Ker} a\oplus\operatorname{Ker} b$, et que $\operatorname{Ker} a=\operatorname{Im} a$ et $\operatorname{Ker} b=\operatorname{Im} b$.
10. En déduire que u est échangeur.

D. Intermède : un principe de décomposition

On se donne dans cette partie un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie, ainsi qu'un endomorphisme f de E. On se donne un nombre complexe arbitraire λ. On pose $v=f-\lambda\mathrm{I}_E$.

11. Montrer que la suite $(\operatorname{Ker}(v^k))_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.
12. Montrer qu'il existe un entier naturel p tel que
$$\forall k\geqslant p,\ \operatorname{Ker} v^k=\operatorname{Ker} v^p$$
On pourra introduire la plus grande dimension possible pour un sous-espace vectoriel de la forme $\operatorname{Ker}(v^k)$ *pour* $k\in\mathbb{N}$.
Montrer qu'alors
$$\operatorname{Ker} v^p=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\operatorname{Ker} v^k$$
et que p peut être choisi parmi les entiers pairs.

Dans la suite de cette partie, on fixe un entier naturel pair p donné par la question 12 et l'on pose

$$E_\lambda^c(f)=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\operatorname{Ker} v^k=\operatorname{Ker} v^p$$

On notera que $E_\lambda^c(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

13. Montrer que $E_\lambda^c(f)=\operatorname{Ker}(v^{2p})$ et en déduire $E=E_\lambda^c(f)\oplus\operatorname{Im}(v^p)$.
Montrer en outre que les sous-espaces vectoriels $E_\lambda^c(f)$ et $\operatorname{Im}(v^p)$ sont tous deux stables par f.
14. Montrer que λ n'est pas valeur propre de l'endomorphisme induit par f sur $\operatorname{Im}(v^p)$. Montrer que si $E_\lambda^c(f)$ n'est pas nul alors λ est l'unique valeur propre de l'endomorphisme induit par f sur $E_\lambda^c(f)$.
15. On se donne ici un nombre complexe μ différent de λ. On suppose que toute valeur propre de f différente de λ est égale à μ.
Montrer que $\operatorname{Im}(v^p)\subset E_\mu^c(f)$, puis que $E=E_\lambda^c(f)\oplus E_\mu^c(f)$.
On pourra s'intéresser au polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par f sur $\operatorname{Im}(v^p)$.

La fin du sujet original (parties E et F) proposait de montrer que la condition (C2) implique (C1) dans le cas non bijectif et que la condition (C3) implique (C1). Je vous encourage à les chercher en temps libre.

FIN DE L'ÉNONCÉ