Programme de colle – MP 1

Intégrales généralisées

Reprise du programme précédent pour exercices.
On ajoute :
Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
Intégration des relations de comparaison	
Intégration des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence.	La fonction de référence est positive.

Passage à la limite sous l'intégrale

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
Passage à la limite sous l'intégrale	
Théorème de convergence dominée : soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$ convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I vérifiant $\lvert f_n\rvert \leqslant \varphi$ pour tout n. Alors : $$\int_I f_n \longrightarrow \int_I f.$$	Démonstration hors programme. L'hypothèse de continuité par morceaux de f, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination.
Extension au cas d'une famille à paramètre réel $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$.	
Théorème d'intégration terme à terme : Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et telle que la série $\sum \int_I \lvert f_n(t)\rvert \,\mathrm{d}t$ converge, alors f est intégrable sur I et $$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$	Démonstration hors programme. L'hypothèse de continuité par morceaux de la somme, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de convergence de $\sum \int_I \lvert f_n\rvert$.

Bien sûr, on connaît aussi les théorèmes d'inversion dans le cas où l'intervalle est un segment et qu'il y a convergence uniforme.

Exemple de limite par découpage de l'intégrale.

Intégrales à paramètres

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
Continuité d'une intégrale à paramètre	
Soit A une partie ~~d'un espace normé de dimension finie~~, I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $A\times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que f est continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde variable. On suppose de plus qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que, pour tout x de A, $\lvert f(x,\cdot)\rvert \leqslant \varphi$. Alors $$g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$$ est définie et continue sur A.	L'hypothèse de continuité par morceaux, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination. Extension au cas où l'hypothèse de domination est satisfaite au voisinage d'un point a de A. Si A est un intervalle de $\mathbb{R}$, extension au cas où l'hypothèse de domination est satisfaite sur tout segment de A. $\leftrightarrows$ SI : transformée de Laplace.

Contenus	Capacités & Commentaires
Dérivation d'une intégrale à paramètre	
Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $J \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que f est continue par morceaux par rapport à la seconde variable, que, pour tout x de J, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I, que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $J \times I$, continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde variable. On suppose de plus qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que, pour tout x de J, $\left\lvert \frac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot) \right\rvert \leqslant \varphi$. Alors $$g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et vérifie : $$\forall x \in J, \qquad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t.$$	Extension au cas où l'hypothèse de domination est satisfaite sur tout segment de J. Classe $\mathcal{C}^k$ d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse d'intégrabilité de $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,\cdot)$ pour tout x de J si $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et domination sur tout segment de $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,\cdot)$.
Exemples d'étude de fonctions définies comme intégrales : régularité, étude asymptotique.	⇆ PC : transformée de Fourier. ⇆ SI : théorème de la valeur initiale, théorème de la valeur finale.

Pour le moment A est une partie de $\mathbb{R}$.

Semaine prochaine : Pas de colle car concours blanc.
Ensuite : Dénombrabilité, familles sommables, séries entières.

Questions de cours :

(i) Énoncés précis parmi tous les théorèmes au programme.

(ii) Étude de l'intégrale semi-convergente $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ (convergence et non intégrabilité).

(iii) Intégrale de Bertrand sur $[2,+\infty[$.

(iv) Intégration des relations de comparaison : démonstration dans le cas de convergence (mais énoncé dans les deux cas).

(v) Théorème de continuité sous le signe $\displaystyle\int$. Énoncé du théorème de classe $\mathcal{C}^k$.

(vi) Théorème de classe $\mathcal{C}^1$ sous le signe $\displaystyle\int$.

(vii) $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, expression des dérivées, convexité, limites en 0^+ et $+\infty$, graphe. (On admet ici que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, démontré dans **CCINP 29**).

(viii) **CCINP 19** :

(a) Prouver que, pour tout entier naturel n, $f_n : t \longmapsto t^n \ln t$ est intégrable sur $]0,1]$ et calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ln t\,\mathrm{d}t$.

(b) Prouver que $f : t \longmapsto \mathrm{e}^t \ln t$ est intégrable sur $]0,1]$ et que $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t \ln t\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nn!}$.

(ix) **CCINP 25** :

(a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculer la limite de (u_n).

(x) **CCINP 26** : Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$.

(a) Justifier que I_n est bien définie.

(b) i. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

ii. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(c) La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^n I_n$ est-elle convergente ?

(xi) **CCINP 27** : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

(a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.

(b) Soit $a \in]0,1[$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,1]$?

(c) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

(d) Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(xii) **CCINP 28** : *N.B. : les deux questions sont indépendantes.*

(a) La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2,+\infty[$?

(b) Soit a un réel strictement positif.
La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

(xiii) **CCINP 29** : On pose : $\forall\, x \in]0,+\infty[$, $\forall\, t \in]0,+\infty[$, $f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

(a) Démontrer que : $\forall\, x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

On pose alors : $\forall\, x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$.

(b) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.

(c) Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

(xiv) **CCINP 30** :

(a) Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

(b) Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(c) i. Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.

ii. Résoudre (E).

(xv) **CCINP 49** : Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}|a_n|$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,+\infty[\,,\ f_n(t) = \dfrac{a_n t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}$.

(a) i. Justifier que la suite (a_n) est bornée.

ii. Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.

On admettra, pour la suite de l'exercice, que $f : t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.

(b) i. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$.

En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty}|f_n(t)|\,\mathrm{d}t$.

ii. Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n\,t^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

(xvi) **CCINP 50** : On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2\,t}}{x+t}\mathrm{d}t$.

(a) Prouver que F est définie et continue sur $]0;+\infty[$.

(b) Prouver que $x \longmapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.

(c) Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.