Programme de colle – MP 1

Intégration sur un segment et régularité des suites et séries de fonctions

Reprise du début du chapitre auquel on ajoute l'intégration sur un segment et la classe $\mathscr{C}^k$.

Dans ce chapitre, les fonctions sont définies sur une partie A de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Convergence simple, convergence uniforme	
Convergence simple sur A. Convergence uniforme sur A. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.	Pour des fonctions bornées, interprétation de la convergence uniforme sur A en termes de norme.
Continuité, double limite	
Si les u_n sont continues en a et si (u_n) converge uniformément vers u sur un voisinage de a, alors u est continue en a. Toute limite uniforme de fonctions continues sur A est continue sur A.	Adaptation au cas où la convergence est uniforme au voisinage de tout point de A.
Théorème de la double limite : soit (u_n) une suite de fonctions de A dans F convergeant uniformément vers u sur A, et soit a un point adhérent à A ; si, pour tout n, u_n admet une limite ℓ_n en a, alors (ℓ_n) admet une limite ℓ et $$u(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell.$$	Démonstration non exigible. Adaptation, si $A \subset \mathbb{R}$, aux cas où $a = +\infty$ et $a = -\infty$.
Intégration d'une limite uniforme sur un segment	
Soit (u_n) une suite de fonctions continues définies sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans F, a un point de I. On suppose que (u_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction u. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$ soit $$U_n(x) = \int_a^x u_n, \quad U(x) = \int_a^x u.$$ Alors (U_n) converge uniformément vers U sur tout segment de I.	En particulier, si (u_n) converge uniformément vers u sur le segment S, alors : $$\int_S u_n \to \int_S u.$$
Dérivation d'une suite de fonctions	
Soit (u_n) une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans F. Si (u_n) converge simplement sur I vers une fonction u, et si (u'_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction v, alors (u_n) converge uniformément vers u sur tout segment de I, u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $u' = v$.	Extension aux suites de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, sous l'hypothèse de convergence simple de $(u_n^{(j)})$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et de convergence uniforme de $(u_n^{(k)})$ sur tout segment de I.
e uniforme de fonctions polynomiales.	Démonstration non exigible.
Séries de fonctions	
Convergence simple, convergence uniforme. Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et la suite de ses restes converge uniformément vers 0. Adaptation au cas des séries de fonctions des résultats des paragraphes ci-dessus.	Ces notions sont définies via la suite des sommes partielles.
Convergence normale d'une série de fonctions. La convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue en tout point.	Les étudiants doivent savoir étudier la somme d'une série de fonctions (régularité, étude asymptotique, utilisation de la comparaison série-intégrale).

Intégrales généralisées

Les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{K}$, corps des réels ou des complexes.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$	
Pour f continue par morceaux de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{K}$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ est dite convergente si la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ a une limite finie en $+\infty$. Si tel est le cas, on note $\int_a^{+\infty} f$ cette limite. Linéarité de l'intégrale sur $[a,+\infty[$, positivité. Dérivation de $x \mapsto \int_x^{+\infty} f$ si f est continue.	Notations $\int_a^{+\infty} f$, $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.
b) Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$	
Une fonction f est dite intégrable sur $[a,+\infty[$ si $\int_a^{+\infty} \lvert f\rvert$ converge.	On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a,+\infty[$ », et « l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge absolument ».
Si f est intégrable sur $[a,+\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.	L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.
c) Intégration des fonctions positives sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$	
Si f est positive sur $[a,+\infty[$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f$ est majorée. Pour α dans $\mathbb{R}$, étude de l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ sur $[1,+\infty[$. Pour f et g deux fonctions réelles positives continues par morceaux sur $[a,+\infty[$: — si $0 \leqslant f \leqslant g$, l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ implique celle de f ; — si $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} O(g(x))$, l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ implique celle de f ; — si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$, l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ équivaut à celle de f.	
d) Intégration sur un intervalle quelconque	
Adaptation des paragraphes précédents aux fonctions définies sur un intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$.	Notations $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a,b[$ », et « l'intégrale $\int_a^b f$ converge absolument ».
Pour α dans $\mathbb{R}$, étude de l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^\alpha}$ sur $]a,b]$, de l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{\lvert x-a\rvert^\alpha}$ sur $[b,a[$.	
Adaptation des paragraphes précédents aux fonctions définies sur un intervalle ouvert $]a,b[$ de $\mathbb{R}$, $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$.	Notations $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, linéarité et positivité de l'application $f \mapsto \int_I f$ sur l'espace des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ dont l'intégrale converge. Relation de Chasles.	Notation $\int_I f$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Espace des fonctions intégrables de I dans E.	
Inégalité triangulaire.	
Si f est continue et intégrable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\int_I f = 0$, alors f est identiquement nulle.	
Changement de variable : étant données une fonction f continue sur $]a,b[$ et une fonction $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathscr{C}^1$, les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et égales en cas de convergence.	Adaptation au cas où φ est strictement décroissante. Les étudiants peuvent appliquer ce résultat sans justification dans des cas de changements de variable simples (fonctions affines, puissances, exponentielle, logarithme).
Intégration par parties sur un intervalle quelconque : $\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.	L'existence des limites du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature. Notation $[fg]_a^b$.

Pas d'intégration des relations de comparaison cette semaine.

Pas d'intégration par parties sur des intervalles quelconques : on revient systématiquement sur un segment.

Peu d'exercices auront été traités sur les intégrales généralisées en début de semaine.

Pas de convergence dominée au programme cette semaine.

Semaine prochaine : Convergence dominée, intégrales à paramètres.

Questions de cours :

(i) Énoncés précis des théorèmes d'intégration sur un segment, primitive, classe $\mathscr{C}^k$ d'une suite de fonction ou d'une série de fonctions, au choix du colleur.
Démonstration dans le cas des primitives pour les suites de fonctions.

(ii) Fonction ζ de Riemann : classe $\mathscr{C}^\infty$, expression des dérivées, variations, convexité, limite aux bornes et graphe.

(iii) Exemple de fonction intégrable au voisinage de $+\infty$, ne tendant pas vers 0, voiire non bornée.

(iv) Si f est intégrable sur $[a,+\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (cas réel ou complexe).

(v) Étude de l'intégrale semi-convergente $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ (convergence et non intégrabilité).

(vi) Intégrales de Bertrand sur $[2,+\infty[$.

(vii) **CCINP 8** :

(a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

i. Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.

Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$.

ii. Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.

(b) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

i. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

ii. Étudier la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

(viii) **CCINP 9** :

(a) Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$.
Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.

(b) On pose $f_n(x) = \frac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos\left(\sqrt{n}x\right)$.

i. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).

ii. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$?

iii. Soit $a>0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,+\infty[$?

iv. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?

(ix) **CCINP 10** : On pose $f_n(x) = \left(x^2+1\right)\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.

(a) Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.

(b) Calculer la limite lorsque $n\to+\infty$ de $\int_0^1 \left(x^2+1\right)\frac{ne^x+xe^{-x}}{n+x}\mathrm{d}x$.

(x) **CCINP 11** :

(a) Soit X une partie de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.
On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n)-f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.
Démontrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur X.

(b) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.

i. Étudier la convergence simple de la suite (f_n).

ii. Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a,+\infty[$ (avec $a>0$), puis sur $]0,+\infty[$.

(xi) **CCINP 12** :

(a) Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f, et que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0\in[a,b]$.
Démontrer que f est continue en x_0.

(b) On pose : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in[0;1]$, $g_n(x) = x^n$.
La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0;1]$?

(xii) **CCINP 14** :

(a) Soit a et b deux réels donnés avec $a<b$.
Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles.
Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors la suite $\left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.

(c) Démontrer que $\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}$.

(xiii) **CCINP 15** : Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

(a) Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.

(b) Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.

(c) La série de fonctions $\sum \dfrac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$?

(xiv) **CCINP 16** : On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\quad u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\,.$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right]$.

(a) Démontrer que S est dérivable sur $[0,1]$.

(b) Calculer $S'(1)$.

(xv) **CCINP 17** : Soit $A \subset \mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

(a) Démontrer l'implication :

$$\Big(\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A\Big)$$
$$\Downarrow$$
$$(\text{la suite de fonctions } (f_n) \text{ converge uniformément vers 0 sur } A)$$

(b) On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [0;+\infty[,\ f_n(x) = n x^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0;+\infty[$.
$\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0;+\infty[$? Justifier.

(xvi) **CCINP 18** : On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$. On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

(a) Étudier la convergence simple de cette série.
On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.

(b) i. Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.

ii. La fonction S est-elle continue sur D ?

(xvii) **CCINP 25** :

(a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

(b) (5/2) : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

(xviii) **CCINP 28** : *N.B. : les deux questions sont indépendantes.*

(a) La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2,+\infty[$?

(b) Soit a un réel strictement positif.
La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

(xix) **CCINP 53** : On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^4x^4}$.

(a) i. Prouver que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
On pose alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

ii. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.
$\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a,b]$? sur $[a,+\infty[$?

iii. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,+\infty[$?

(b) Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

(c) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.