

1/ PRÉSENTATION DU SUJET

Le sujet était composé de trois exercices totalement indépendants. Le premier exercice était basé sur le problème classique des urnes de Pólya. Le second exercice permettait de déterminer l'unique solution d'une équation fonctionnelle sous la forme d'une somme de série de fonctions, puis d'établir certaines de ses propriétés. Le troisième exercice étudiait la généralisation au cas des matrices symétriques positives de la méthode de Héron.

Le sujet avait pour objectif d'évaluer les candidats sur une vaste partie du programme des deux années de classe préparatoire ainsi que sur les six grandes compétences exposées dans le programme de la filière PC. L'indépendance des trois exercices avait pour but de permettre aux candidats de commencer le sujet avec les thèmes du programme qu'ils maîtrisaient le mieux, puis de pouvoir passer facilement à un autre exercice en cas de difficulté. Le sujet était d'une longueur raisonnable afin de donner une réelle possibilité au candidat de traiter l'ensemble des questions.

2/ COMMENTAIRES GÉNÉRAUX SUR LES COPIES

L'ensemble des correcteurs a constaté une portion plus élevée qu'habituellement de copies relativement faibles. Cette remarque statistique s'explique certainement par les difficultés rencontrées par les candidats durant cette année scolaire perturbée par la situation sanitaire.

L'objectif d'une épreuve de mathématiques ne se résume pas à évaluer les capacités calculatoires des candidats. Ces derniers doivent également prêter attention à la présentation de leurs raisonnements avec une rédaction précise. Lorsqu'un candidat souhaite utiliser un résultat du cours, il se doit de citer et de vérifier soigneusement toutes ses hypothèses. De plus, il est important de choisir une présentation claire (avec une liste numérotée par exemple) pour les théorèmes comportant de nombreuses hypothèses à vérifier (comme le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre par exemple).

De même, si un candidat souhaite utiliser le résultat d'une question précédente, il se doit de l'indiquer en citant le numéro de la question.

Nous avons constaté qu'une partie non négligeable des candidats ne lisait pas les questions assez consciencieusement : il arrive souvent qu'ils oublient de répondre à une partie de la question.

L'ensemble des correcteurs souhaite rappeler que la présentation et le soin de la copie contribuent à son évaluation. Certains candidats n'ont pas respecté la consigne d'utiliser un stylo de couleur suffisamment foncée, ce qui rend la lecture de leur copie très difficile. De plus, l'interdiction d'utiliser un effaceur n'empêche pas les candidats de raturer proprement. Nous encourageons également les candidats à aérer leur copie, à ne pas utiliser d'abréviation et à mettre en valeur leurs résultats afin d'en faciliter la lecture.

L'exercice 1 a principalement posé des difficultés de compréhension sur le déroulé de l'expérience aléatoire étudiée. Une part importante de candidats s'est trompée sur le nombre de boules présentes dans l'urne à un instant donné, ce qui rendait difficile le traitement correct de cet exercice.

L'exercice 2 a été traité de manière satisfaisante par une part importante des candidats. Il a donné l'occasion aux étudiants sérieux de se mettre en valeur en appliquant directement des résultats et des méthodes du cours dans de nombreuses questions.

Finalement, l'exercice 3 a mis en évidence les faiblesses des candidats sur la manipulation des inégalités. Lorsque les solutions proposées étaient justes, elles étaient souvent complexes et mal rédigées, ce qui rendait difficile leur évaluation.

Pour terminer, voici quelques remarques générales sur des erreurs récurrentes :

- La rigueur et le formalisme ne sont pas facultatifs en probabilité. Il ne faut pas confondre un évènement avec sa probabilité. De plus, pour utiliser la formule des probabilités totales, il est nécessaire de citer un système complet d'évènements.
- Le théorème d'intégration par parties pour les intégrales généralisées permet de montrer que deux intégrales sont de même nature, mais il ne permet pas d'écrire une égalité tant que l'on ne s'est pas assuré qu'une des deux intégrales en jeu converge.
- Les candidats doivent faire attention à la manipulation des inégalités. Les correcteurs ont observé beaucoup d'erreurs, notamment dans l'exercice 3.

3/ REMARQUES DÉTAILLÉES PAR QUESTION

Exercice 1 (Les urnes de Pólya) :

Q1 – La réponse est souvent correcte, mais la justification est souvent absente.

Q2 – Les premières erreurs dans la compréhension de l'énoncé se manifestent dans cette question. Certains candidats utilisent des notations dénuées de sens, comme $P(X_2|X_1)$. Peu de candidats précisent le système complet d'évènements utilisé.

Q3 – Il faut être précis dans le vocabulaire employé pour décrire ce que représente S_n . Les expressions « à l'issue » et « pendant » n'ont pas le même sens.

Q4 – Beaucoup de candidats n'ont pas réussi à compter le nombre de boules dans l'urne, ce qui ne leur a pas permis de répondre correctement à cette question.

Q5 – Il faut mentionner le théorème des probabilités totales et citer le système complet d'évènements utilisé.

Q6 – Beaucoup de candidats ont mal formulé leur hypothèse de récurrence.

Q7 – Un certain nombre de candidats a additionné les évènements, ce qui n'a aucun sens.

Q8 – Une part importante de candidats suppose que les évènements $(X_k = 0)$ sont indépendants pour effectuer leur calcul, ce qui n'est pas le cas.

Q9 – Peu de candidats ont réussi à dominer correctement la fonction.

Q10 – Les évènements $(S_n = k)$ et $(S_n = k-1)$ ne forment pas un système complet d'évènements.

Q11 – Question globalement bien traitée. Néanmoins, il faut faire attention à traiter séparément les deux cas particuliers $k = 1$ et $k = n+1$.

Exercice 2 (Résolution d'une équation fonctionnelle) :

Q12 – Question globalement bien traitée.

Q13 – Question globalement bien traitée. Il faut néanmoins faire attention à rester rigoureux dans la manipulation des sommes infinies en n'utilisant pas des points de suspension.

Q14 – Question globalement bien traitée. Cependant, quelques candidats ont confondu la décroissance de $f_n(x)$ par rapport à n et celle par rapport à x pour vérifier les hypothèses du théorème spécial des séries alternées.

Q15 – Une part non négligeable de candidats permute la somme et la limite sans aucune justification pour aboutir au résultat demandé, ce qui n'est pas licite en général. La plupart des autres candidats ne font pas attention au premier terme de la somme dans la rédaction de leur démonstration.

Q16 – Question globalement bien traitée. Néanmoins certains candidats s'autorisent à ne pas rédiger une démonstration complète : ils ont été pénalisés.

Q17 – Question souvent mal traitée. La majorité des candidats ne voient pas le lien avec les questions précédentes.

Q18 – Beaucoup de confusions entre la convergence simple et la convergence uniforme.

Q19 – De nombreux candidats déduisent de la question précédente que la série de fonctions converge uniformément sur tout l'intervalle de définition de la fonction, ce qui n'est pas le cas. De plus, les hypothèses pour appliquer le théorème de continuité sont rarement toutes citées et vérifiées.

Q20 – Commentaires analogues à ceux de la question précédente.

Q21 – Pour appliquer le théorème spécial des séries alternées, il est nécessaire de vérifier au moins succinctement ses hypothèses, ce que peu de candidats font.

Q22 – L'inégalité est globalement bien traitée. L'équivalent donné par les candidats pour la fonction étudiée est souvent correct, mais il est rarement établi de manière rigoureuse.

Q23 – La justification de l'intégrabilité est presque toujours fautive. Pour utiliser le théorème d'intégration par parties, il est nécessaire de commencer par vérifier toutes ses hypothèses.

Q24 – Souvent non traitée ou mal traitée. Très peu de candidats identifient la somme, encore moins le théorème d'interversion série-intégrale sur un intervalle.

Exercice 3 (Approximation d'une racine carrée par la méthode de Héron) :

Q25 - Il faut mentionner que $f_k(x)$ est positif pour conclure.

Q26 - La démonstration proposée est souvent laborieuse, mais la plupart des candidats arrivent à prouver le résultat souhaité.

Q27 - Une part écrasante des candidats pense que le minorant trouvé pour la suite est automatiquement sa limite sans aucune justification.

Q28 - Question globalement bien traitée.

Q29 - L'initialisation est souvent mal vérifiée.

Q30 - Question globalement bien traitée.

Q31 - La plupart des étudiants aboutit au système à résoudre, mais sa résolution est souvent erronée.

Q32 - Il est fondamental de préciser que la matrice est à coefficients réels pour utiliser le théorème spectral.

Q33 - La démonstration que R est une matrice symétrique est souvent fautive. Des candidats ne mentionnent pas que la matrice P est orthogonale ou ne connaissent pas les propriétés de la transposition.

Q34 - Les deux premiers points sont globalement bien traités. La démonstration du troisième point manque souvent de rigueur.

Q35 - Question globalement bien traitée.

Q36 - Les calculs sont souvent difficiles à suivre. Il faut mentionner que deux matrices semblables ont la même trace ou une autre propriété analogue.

Q37 - Question très peu abordée.

Q38 - Les rares candidats qui ont abordé cette question l'ont globalement bien traitée.