chapitreXVII

Dénombrabilité, Sommabilité

I Rappels...

1 ... sur des sommes finies

- Il faut connaître $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ et savoir continuer, par télescopage de $(k+1)^n - k^n$.
- On sait aussi calculer $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ si $x \neq 1$ et $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$.
- La formule $\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} a_{i,j}\right)$, si I et J sont deux ensembles finis, est une conséquence de la commutativité et de l'associativité de l'addition.
Dans le cas de sommes triangulaires, l'intervention peut aussi se faire en étant prudent sur les bornes : par exemple, il faut être à l'aise avec $\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \left(a_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j} a_{i,j}\right)$.
Si on a une hésitation, un artifice simple : posons $a_{i,j} = 0$ si $j < i$. Alors

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j} a_{i,j}\right).$$

On peut aussi représenter l'ensemble des couples (i,j) d'indexation pour « voir » ce qui se passe.
Signalons enfin la distributivité de la multiplication sur l'addition (si on est dans un anneau), qui permet d'écrire

$$\left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right) = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_i b_j\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j$$

2 ... et sur les ensembles finis

Définition : Ensemble fini, cardinal

Un ensemble E est dit **fini** s'il est vide ou s'il existe un $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection entre $[\![1,n]\!]$ et E.
n est le **cardinal** de E, noté $|E| = \#E = |E|$.
On pose $|\varnothing| = 0$.

Propriété

Soient E, F deux ensembles finis.

(i) Si $A \in \mathscr{P}(E)$, A fini et $|A| \leqslant |E|$, avec égalité si et seulement si $A = E$.
(ii) Si $A, B \in \mathscr{P}(E)$ disjoints ($A\cap B = \varnothing$), $|A\cup B| = |A| + |B|$.
(iii) Si $A, B \in \mathscr{P}(E)$, $|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$.
(iv) Si $A \in \mathscr{P}(E)$, $|E \setminus A| = |E| - |A|$.
(v) si $A, B \in \mathscr{P}(E)$, $|A\setminus B| = |A| - |A\cap B|$.
(vi) $E\times F$ est fini et $|E\times F| = |E|\times|F|$.
(vii) F^E est fini et $\left|F^E\right| = |F|^{|E|}$.
(viii) $\mathscr{P}(E)$ est fini et $|\mathscr{P}(E)| = 2^{|E|}$.

II Ensembles dénombrables

1 Définition

Définition : Ensemble dénombrable

On dit qu'un ensemble E est **dénombrable** lorsqu'il est en bijection (c'est-à-dire équipotent) avec $\mathbb{N}$.

Propriété

Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Propriété

$\mathbb{Z}$ est dénombrable.

2 Ensembles au plus dénombrables

Propriété

*Un ensemble est fini ou dénombrable (on dit parfois **au plus dénombrable**) s'il est en bijection (c'est-à-dire équipotent) avec une partie de $\mathbb{N}$.*

Corollaire

Une partie d'un ensemble dénombrable est finie ou dénombrable.

3 Produit cartésien

Propriété

$\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

Propriété

Un produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Théorème

$\mathbb{Q}$ est dénombrable.

4 Réunion d'ensembles dénombrables

Lemme

Soit E un ensemble non vide. Il y a équivalence entre

(i) E est au plus dénombrable.
(ii) Il existe une surjection entre $\mathbb{N}$ et E
(iii) Il existe une injection entre E et $\mathbb{N}$

Propriété

Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrables.

5 Ensembles non dénombrables

Théorème

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Théorème : de Cantor (HP)

Si E est un ensemble non vide, il n'existe pas de surjection de E dans $\mathscr{P}(E)$.
En particulier, $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

III Sommabilité

1 Introduction

2 Familles de réels positifs

a Définition

Définition : Famille sommable

Soit I ensemble dénombrable, on note ici $\mathscr{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I.
Soit $(u_i)_{i\in I} \in (\mathbb{R}_*^+)^I$ une famille de **réels positifs**.
On dit que $(u_i)_{i\in I}$ est **sommable** lorsque l'ensemble $A = \left\{ \sum_{i\in J} u_i,\ J \in \mathscr{P}_f(I) \right\}$ est majoré.
On appelle **somme** de la famille, notée $\sum_{i\in I} u_i$ la borne supérieure de A $\sum_{i\in I} u_i = \sup_{J\in\mathscr{P}_f(I)} \left(\sum_{i\in J} u_i \right)$.
Lorsque la famille de réels positifs $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, on pose $\sum_{i\in I} u_i = +\infty$.

Propriété : Cas des séries

*La famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_*^+)^{\mathbb{N}}$ de **réels positifs** est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.*

Le cas échéant, les sommes $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ de la série de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ de la famille sommable sont égales.

b Propriétés

Propriété

Si I est dénombrable.
- *Si pour tout $i \in I$, $0 \leqslant a_i \leqslant b_i$ et $(b_i)_{i\in I}$ sommable, alors $(a_i)_{i\in I}$ sommable.*
  Le cas échéant, $\sum_{i\in I} a_i \leqslant \sum_{i\in I} b_i$.
- *Si $J \subset I$, et $(a_i)_{i\in I}$ sommable, alors $(a_i)_{i\in J}$ sommable.*
  Le cas échéant, $\sum_{i\in J} a_i \leqslant \sum_{i\in I} a_i$.

c Sommation par paquets

Théorème : sommation par paquets

Soit I un ensemble dénombrable, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une « partition » de I : $p \neq q \Longrightarrow I_p \cap I_q = \varnothing$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = I$ mais il peut y avoir des I_n vides. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs.
La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
- *pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable,*
- *la série $\sum \left(\sum_{i\in I_n} u_i \right)$ converge.*

Le cas échéant, $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i\in I_n} u_i \right)$.

Propriété : sommabilité par indexation

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs, I étant dénombrable.
Soit $n \mapsto i_n$ une bijection de $\mathbb{N}$ sur I (i.e. une numérotation des éléments de I).
$(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{i_n}$ converge, et le cas échéant,

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{i_n}.$$

Corollaire

Si $\sum a_n$ est une série convergente à termes réels positifs et $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$, alors la série $\sum a_{\sigma(n)}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

3 Familles de réels quelconques ou de complexes

a Définition, somme

Définition : Famille sommable

Soit I un ensemble dénombrable et $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$.
On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est **sommable** lorsque la famille de réels positifs $(|u_i|)_{i\in I}$ l'est.

Propriété

Soit I un ensemble dénombrable et $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$.
Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors les deux familles $\left(u_i^+\right)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ et $\left(u_i^-\right)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ le sont.

Définition : Somme dans le cas réel

Soit I un ensemble dénombrable et $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ une famille sommable.
On définit la **somme** $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-$.

Propriété

Soit I un ensemble dénombrable et $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$.
Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors les deux familles $(\mathfrak{Re}(u_i))_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ et $(\mathfrak{Im}(u_i))_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ le sont.

Définition : Somme dans le cas complexe

Soit I un ensemble dénombrable et $(u_j)_{j\in I} \in \mathbb{C}^I$ une famille sommable.
Si la famille $(u_j)_{j\in I}$ est sommable, les deux familles $\left(\mathfrak{Re}(u_j)\right)_{j\in I} \in \mathbb{R}^I$ et $\left(\mathfrak{Im}(u_j)\right)_{j\in I} \in \mathbb{R}^I$ le sont.
Cela permet de définir la somme $\sum_{j\in I} u_j = \sum_{j\in I} \mathfrak{Re}(u_j) + \mathrm{i} \sum_{j\in I} \mathfrak{Im}(u_j)$.

Propriété : Cas des séries

La famille $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de nombres réels ou complexes est sommable si et seulement si la série $\sum u_i$ est ***absolument*** *convergente.*

Sa somme est alors la somme de la série $\sum u_i$.

b Sommation par paquets

Théorème : sommation par paquets

Soit I un ensemble dénombrable, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une « partition » de I :

$$p \neq q \Rightarrow I_p \cap I_q = \varnothing \quad \text{et} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = I$$

Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels ou complexes ***sommable*** *alors*

C1 *Pour tout n, $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable.*

C2 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$ *converge*

C3 $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$

Théorème : sommation par paquets (bis)

Soit I un ensemble dénombrable, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une « partition » de I :

$$p \neq q \Rightarrow I_p \cap I_q = \varnothing \quad \text{et} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = I$$

Si

H1 *Pour tout n, $(|u_i|)_{i\in I_n}$ est sommable.*

H2 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i\in I_n} |u_i|\right)$ *converge.*

Alors

C1 *La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.*

C2 *Pour tout n, $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable.*

C3 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$ *converge*

C4 $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$

c Commutativité

Propriété

Soit I est un ensemble dénombrable et $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres réels ou complexes.

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(I)$ une permutation de I.

Alors $(u_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est sommable, et $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}$.

Propriété

Soit I est un ensemble dénombrable et $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres réels ou complexes , $k \mapsto i_k$ une bijection de $\mathbb{N}$ sur I.

La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} u_{i_k}$ est ***absolument convergente****, et si c'est le cas, on a $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{i_k}$.*

Corollaire

Si $\sum a_n$ est une série convergente à termes réels ou complexes et $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$, alors la série $\sum a_{\sigma(n)}$ ***converge absolument*** *et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.*

d Linéarité

Propriété

Si I est un ensemble dénombrable, si $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sont deux familles sommables d'éléments de $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), si $\lambda \in \mathbb{K}$, la famille $(\lambda u_i + v_i)_{i\in I}$ est sommable, et

$$\sum_{i\in I}(\lambda u_i + v_i) = \lambda\sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$$

IV Sommes doubles : le cas où $I = \mathbb{N}^2$

1 Sommes doubles de réels positifs

Théorème : de Fubini

Soit $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs.

Alors $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_m a_{m,n}$ converge.*

H2 *La série $\displaystyle\sum_n\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right)$ converge.*

si et seulement si

H'1 *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, la série $\displaystyle\sum_n a_{m,n}$ converge.*

H'2 *La série $\displaystyle\sum_m\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}\right)$ converge.*

Le cas échéant, $\displaystyle\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}\right)$

2 Sommes doubles de réels ou de complexes

Théorème : de Fubini

Soit $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels ou de complexes.

Si $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable (c'est-à-dire si $(|a_{m,n}|)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ l'est, par exemple avec le théorème de Fubini précédent) alors

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}\right).$$

3 Cas particulier : suites doubles produits

Corollaire

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels ou complexes. Alors la suite double $(u_m v_n)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si (soit l'une des suites est nulle, soit les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont ***absolument*** *convergentes).*

Lorsque la dernère condition est vérifiée, on a en outre

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} u_m v_n = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_m\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)$$

4 Produit de Cauchy

Corollaire

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries réelles ou complexes absolument convergentes. On note, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

$\sum w_n$ est absolument convergente, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$