chapitreXVII

Dénombrabilité, Sommabilité

Extrait du programme officiel :

La notion de famille sommable est introduite en vue de l'étude des probabilités.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Ensembles dénombrables	
Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.	Les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables.
Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.	
Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.	Démonstrations non exigibles.
Les ensembles $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.	
L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.	Démonstration non exigible.
b) Familles sommables	
Famille sommable de réels positifs indexée par un ensemble dénombrable. Somme.	La famille $(u_i)_{i\in I}$ est dite sommable si l'ensemble des sommes $\sum\limits_{i\in F} u_i$ où F décrit l'ensemble des parties finies de I est majoré ; dans ce cas, la somme de la famille $(u_i)_{i\in I}$ est la borne supérieure de l'ensemble précédent. Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, sa somme est $+\infty$. Dans tous les cas, la somme est notée $\sum\limits_{i\in I} u_i$.
Théorème de sommation par paquets :	Démonstration hors programme.
si $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de I et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs, alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si : — Pour tout entier n la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable. — La série $\sum\Big(\sum\limits_{i\in I_n} u_i\Big)$ converge. Dans ce cas : $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{i\in I_n} u_i\Big).$	
Famille sommable de nombres complexes indexée par un ensemble dénombrable	La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si la famille $(\lvert u_i\rvert)_{i\in I}$ l'est.
Somme d'une telle famille.	Pour une famille de réels, on se ramène à ses parties positive et négative.
Lorsque $I=\mathbb{N}$, lien avec la convergence absolue de la série $\sum u_n$.	
Invariance de la sommabilité et de la valeur de la somme par permutation de l'ensemble des indices.	Démonstration non exigible.
Linéarité de la somme.	
Théorème de sommation par paquets.	Démonstration hors programme. On vérifie l'hypothèse de sommabilité en appliquant le théorème de sommation par paquets à la famille $(\lvert u_i\rvert)_{i\in I}$.
c) Applications des familles sommables	
La famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ de réels positifs est sommable si et seulement si pour tout n, la série $\sum a_{m,n}$ converge et la série $\sum\Big(\sum\limits_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\Big)$ converge. Si tel est le cas $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\Big) = \sum_{m=0}^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}\Big).$	
Si la famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ de nombres complexes est sommable, alors : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}.$	On vérifie l'hypothèse de sommabilité en appliquant l'énoncé précédent à la famille $(\lvert a_{m,n}\rvert)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.	

Table des matières

XVII Dénombrabilité, Sommabilité

I Rappels...

1 ... sur des sommes finies

- Il faut connaître $\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\sum_{k=1}^{n} k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ et savoir continuer, par télescopage de $(k+1)^n-k^n$.
- On sait aussi calculer $\sum_{k=0}^{n} x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ si $x\neq 1$ et $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=(1+x)^n$.
- La formule $\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_{i,j}\right)=\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} a_{i,j}\right)$, si I et J sont deux ensembles finis, est une conséquence de la commutativité et de l'associativité de l'addition.
  Dans le cas de sommes triangulaires, l'interversion peut aussi se faire en étant prudent sur les bornes : par exemple, il faut être à l'aise avec $\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right)=\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\left(a_{i,j}\right)=\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j} a_{i,j}\right)$.
  Si on a une hésitation, un artifice simple : posons $a_{i,j}=0$ si $j<i$. Alors
$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right)=\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n} a_{i,j}\right)=\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{n} a_{i,j}\right)=\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j} a_{i,j}\right).$$
  On peut aussi représenter l'ensemble des couples (i,j) d'indexation pour « voir » ce qui se passe.
  Signalons enfin la distributivité de la multiplication sur l'addition (si on est dans un anneau), qui permet d'écrire
$$\left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right)=\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_i b_j\right)=\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j$$

2 ... et sur les ensembles finis

Définition : Ensemble fini, cardinal

Un ensemble E est dit fini s'il est vide ou s'il existe un $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection entre $[\![1,n]\!]$ et E.
n est le cardinal de E, noté $|E| = \#E = |E|$.
On pose $|\varnothing| = 0$.

Remarque

On dit aussi que E est équipotent à $[\![1,n]\!]$.
Cela revient à numéroter les éléments de E : $E = \{x_k, k \in [\![1,n]\!]\}$.

Propriété

Soient E, F deux ensembles finis.

(i) Si $A \in \mathscr{P}(E)$, A fini et $|A| \leqslant |E|$, avec égalité si et seulement si $A = E$.
(ii) Si $A, B \in \mathscr{P}(E)$ disjoints ($A \cap B = \varnothing$), $|A \cup B| = |A| + |B|$.
(iii) Si $A, B \in \mathscr{P}(E)$, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
(iv) Si $A \in \mathscr{P}(E)$, $|E \setminus A| = |E| - |A|$.
(v) si $A, B \in \mathscr{P}(E)$, $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$.
(vi) $E \times F$ est fini et $|E \times F| = |E| \times |F|$.
(vii) F^E est fini et $\left|F^E\right| = |F|^{|E|}$.
(viii) $\mathscr{P}(E)$ est fini et $|\mathscr{P}(E)| = 2^{|E|}$.

Exercice : CCINP 112

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.
On désigne par $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Déterminer le nombre a de couples $(A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \varnothing$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A,B,C) \in (\mathscr{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

---

1. On note $F = \left\{(A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A \subset B\right\}$.
   Soit $p \in [\![1,n]\!]$. On pose $F_p = \left\{(A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A \subset B \text{ et } \operatorname{card} B = p\right\}$.

   Pour une partie B à p éléments donnée, le nombre de parties A de E telles que $A \subset B$ est $\operatorname{card} \mathscr{P}(B) = 2^p$.
   De plus, on a $\binom{n}{p}$ possibilités pour choisir une partie B de E à p éléments.
   On en déduit que : $\forall p \in [\![0,n]\!]$, $\operatorname{card} F_p = \binom{n}{p} 2^p$.
   Or $F = \bigcup\limits_{p=0}^{n} F_p$ avec $F_0, F_1, \ldots, F_n$ deux à deux disjoints.

   Donc $a = \operatorname{card} F = \sum\limits_{p=0}^{n} \operatorname{card} F_p = \sum\limits_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p = 3^n$, d'après le binôme de Newton.
   Conclusion : $a = 3^n$.
   Autre méthode :

   Le raisonnement suivant (corrigé non détaillé) permet également de répondre à la question 1.
   Notons encore $F = \left\{(A,B) \in (\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A \subset B\right\}$.
   À tout couple (A,B) de F, on peut associer l'application $\varphi_{A,B}$ définie par :

$$\varphi_{A,B} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{1,2,3\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 2 & \text{si} \quad x \notin A \text{ et } x \in B \\ 3 & \text{si} \quad x \notin B \end{cases} \end{array}$$

   On note $\mathscr{A}(E, \{1,2,3\})$ l'ensemble des applications de E dans $\{1,2,3\}$.

   Alors l'application $\Theta : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathscr{A}(E, \{1,2,3\}) \\ (A,B) & \longmapsto & \varphi_{A,B} \end{array}$ est bijective.

Le résultat en découle.

2. $\{(A,B)\in(\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A\cap B=\varnothing\}=\left\{(A,B)\in(\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A\subset\overline{B}\right\}$.

$$\begin{aligned}\text{Or card}\left\{(A,B)\in(\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A\subset\overline{B}\right\} &= \text{card}\left\{(A,\overline{B})\in(\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A\subset\overline{B}\right\}\\ &= \text{card}\left\{(A,C)\in(\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A\subset C\right\}\\ &= a.\end{aligned}$$

Donc $b=a$.

3. Compter tous les triplets (A,B,C) tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et tels que $A\cup B\cup C=E$ revient à compter tous les couples (A,B) tels que $A\cap B=\varnothing$ car, alors, C est obligatoirement égal à $\overline{A\cup B}$.
En d'autres termes, $c=\text{card}\left\{(A,B)\in(\mathscr{P}(E))^2 \ / \ A\cap B=\varnothing\right\}=b=3^n$.

II Ensembles dénombrables

1 Définition

Définition : Ensemble dénombrable

On dit qu'un ensemble E est dénombrable lorsqu'il est en bijection (c'est-à-dire équipotent) avec $\mathbb{N}$.

Remarque

On peut compter ses éléments... sans s'arrêter !
Il a en quelques sortes autant d'éléments que $\mathbb{N}$.
On peut écrire $E=\{x_n, n\in\mathbb{N}\}$.
Trouver une bijection entre E et $\mathbb{N}$, ou entre $\mathbb{N}$ et E, cela revient au même.

Exemples

E 1 – $\mathbb{N}$ est dénombrable.

E 2 – $2\mathbb{N}$ est dénombrable.

E 3 – $2\mathbb{N}+1$ est dénombrable.

Propriété

Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Démonstration

Soit A une telle partie.
On construit par récurrence une application $\phi:\mathbb{N}\to A$ tel que $\phi(0)=\min A$ (qui existe bien) et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\phi(n+1)=\min\left(A\cap[\phi(n)+1,+\infty[\right)$ (qui existe toujours car A est infinie).
ϕ est injective par stricte croissance.
De plus, $\phi(n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\infty$, donc pour tout $p\in A$, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $\phi(n)\leqslant p<\phi(n+1)$: il s'agit de $n=\max\left\{k\in\mathbb{N},\phi(k)\leqslant p\right\}$.
Et donc, nécessairement, $p=\phi(n)$ par construction de ϕ.. $\square$

Exemple

On retrouve la dénombrabilité de $2\mathbb{N}$ et $2\mathbb{N}+1$.

Propriété

$\mathbb{Z}$ est dénombrable.

2 Ensembles au plus dénombrables

Propriété

Un ensemble est fini ou dénombrable (on dit parfois au plus dénombrable) s'il est en bijection (c'est-à-dire équipotent) avec une partie de $\mathbb{N}$.

Démonstration

Le sens direct est clair.
Pour la réciproque, c'est pas très difficile non plus. □

Corollaire

Une partie d'un ensemble dénombrable est finie ou dénombrable.

Démonstration

A partie de □

3 Produit cartésien

Propriété

$\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

Démonstration

Pour $\mathbb{N}^2$ une preuve géométrique, et une $(m,n) \in \mathbb{N}^2 \mapsto 2^m(2n+1) \in \mathbb{N}^*$. □

Propriété

Un produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Démonstration

On détaille $p=2$ en passant par $\mathbb{N}^2$ puis récurrence. □

Théorème

$\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Démonstration

Il est équipotent à la partie infinie des couples $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $p \wedge q = 1$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ qui est dénombrable vu la propriété précédente. □

4 Réunion d'ensembles dénombrables

Remarque

On commence par le lemme très intuitif suivant :

Lemme

Soit E un ensemble non vide. Il y a équivalence entre

(i) E est au plus dénombrable.

(ii) Il existe une surjection entre $\mathbb{N}$ et E

(iii) Il existe une injection entre E et $\mathbb{N}$

Démonstration : du lemme

$(i) \Rightarrow (ii)$ et (iii) Si E est dénombrable, il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et E donc une surjection entre $\mathbb{N}$ et E et une injection entre E et $\mathbb{N}$.
Si E est fini, $n = |E|$, il existe une bijection f de $[\![1, n]\!]$ vers E. N'importe quel prolongement de f (au départ) à $\mathbb{N}$ est une surjection entre $\mathbb{N}$ et E et le prolongement de f^{-1} à l'arrivée à $\mathbb{N}$ est une injection entre E et $\mathbb{N}$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ S'il existe $f : \mathbb{N} \to E$ fonction surjective, Soit la fonction pour chaque $x \in E$, on considère $n(x)$ le plus petit antécédent de x par f. Alors la restriction de f à la partie $\{n(x),\ x \in E\}$ de $\mathbb{N}$ est bijective. Donc E est au plus dénombrable.

$(iii) \Rightarrow (i)$ S'il existe $g : E \to \mathbb{N}$ fonction injective, alors E est équipotent à $g(E)$ partie de $\mathbb{N}$ donc E est au plus dénombrable. □

Exemple

On retrouve la dénombrabilité de $\mathbb{Q}$ grâce à la surjection $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \mapsto \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ dénombrable.

Propriété

Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrables.

Démonstration : de la propriété

Soit I fini ou dénombrable et $(E_i)_{i \in I}$ famille d'ensembles finis ou dénombrables.
On a alors des applications $f_i : \mathbb{N} \to E_i$ surjectives pour chaque $i \in I$.

Alors $f : \left| \begin{array}{ccc} I \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \bigcup\limits_{i \in I} E_i \\ (i, n) & \longmapsto & f_i(n) \end{array} \right.$ est surjective. Comme $I \times \mathbb{N}$ est dénombrable (partie infinie d'un ensemble dénombrable), on obtient par composition une surjection entre $\mathbb{N}$ et $\bigcup\limits_{i \in I} E_i$ qui est au plus dénombrable. □

Exemple

On retrouve la dénombrabilité de $\mathbb{Q} = \bigcup\limits_{(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*} \left\{ \dfrac{p}{q} \right\}$ avec $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ dénombrable et chaque $\left\{ \dfrac{p}{q} \right\}$ fini.

Ou encore $\mathbb{Q} = \bigcup\limits_{q \in \mathbb{N}^*} \left\{ \dfrac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z} \right\}$.

5 Ensembles non dénombrables

Remarque : Rappel

Tout nombre réel non décimal admet un unique développement décimal.
Les décimaux en ont deux. Par exemple $3{,}1416 = 3{,}141599999...$
Tout réel admet un unique développement décimal ne se terminant pas par une infinité de 9 appelé développement décimal propre.

Théorème

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Démonstration

Procédé diagonal de Cantor pour $]0,1[$, puis partie infinie ou bijection avec $\mathbb{R}$.

Autre preuve : on se donne (x_n) une suite dénombrant $[0,1]$ et on construit par trichotomie une suite de segments emboîtés (I_n) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \notin I_n$. Les suites des bornes des segments sont adjacente, donc il y a un élément de $[0,1]$ qui est dans tous les I_n (la limite), ce qui est contradictoire. □

Remarque

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas dénombrable non plus, sinon $\mathbb{R}$ le serait.

Théorème : de Cantor (HP)

Si E est un ensemble non vide, il n'existe pas de surjection de E dans $\mathscr{P}(E)$.

Démonstration

Si $f : E \to \mathscr{P}(E)$, $\{x \in E,\ x \notin f(x)\}$ n'a pas d'antécédent. □

Corollaire

$\mathscr{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

III Sommabilité

1 Introduction

Remarque : Digression sur une série semi-convergente

On sait que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente et que sa somme vaut $\ln 2$ avec trois méthodes (à savoir faire !)

- soit en utilisant le développement asymptotique $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$ de la série harmonique et en séparant termes d'ordre pair ou impair,
- soit avec une inégalité de Taylor-Lagrange appliquée entre 0 et 1 à $x \mapsto \ln(1+x)$,
- soit encore en voyant que $\dfrac{1}{n+1} = \displaystyle\int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t$ et en reconnaissant une somme géométrique.

Ainsi,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \ln 2.$$

Il se trouve que l'ordre des termes est important dans cette somme.

Ainsi, en sommant un terme d'indice impair puis deux d'indices pairs, on peut obtenir

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{\ln 2}{2}.$$

En effet, on peut, dans une somme partielle, regrouper le terme d'ordre impair et le terme d'ordre pair qui le suit immédiatement et obtenir

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\right) = \frac{\ln 2}{2}.$$

(Bien sûr, il faudrait le formaliser plus rigoureusement, mais c'est l'idée).

On peut en fait démontrer qu'en réordonnant les termes, on est capable d'obtenir n'importe quel nombre réel et même $\pm\infty$.

Par exemple, en regroupant les termes positifs par paquets toujours $\geqslant \dfrac{1}{4}$ (ce qui est toujours possible) :

$$(1) - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \ldots$$

on obtient une série qui diverge grossièrement (la suite extraite des termes de rangs pairs ne tend pas vers 0).

De plus, en faisant des regroupement de « paquets », il est possible de trouver des séries divergentes : c'est ce qui arriverait si on rassemblait d'une part les termes d'indice pair et d'autre part les termes d'indice impair.

Bref, la convergence n'est « ni commutative, ni associative », même si la série initiale était convergente.

Remarquons que dans une série divergente comme $\sum (-1)^n$, on peut avec des paquets, la rendre convergente : $(1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots$ converge vers 0.

Toutes les séries ne demandent pas tant de précautions. Par exemple, la série absolument convergente $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge vers $\frac{\pi^2}{6}$ et ce, quel que soit l'ordre des termes, avec ou non des paquets, finis ou infinis : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ peut être manipulée comme une somme finie.

Lorsque l'ordre des termes n'importe plus, on n'est plus obligé de se limiter à des sommes indexées par $\mathbb{N}$: on peut sommer des famille indexées par n'importe quel ensemble dénombrable : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Q}$...

2 Familles de réels positifs

a Définition

Définition : Famille sommable

Soit I ensemble dénombrable, on note ici $\mathscr{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I.
Soit $(u_i)_{i\in I}\in(\mathbb{R}_*^+)^I$ une famille de réels positifs.
On dit que $(u_i)_{i\in I}$ est sommable lorsque l'ensemble $A=\left\{\sum_{i\in J}u_i,\ J\in\mathscr{P}_f(I)\right\}$ est majoré.
On appelle somme de la famille, notée $\sum_{i\in I}u_i$ la borne supérieure de A $\sum_{i\in I}u_i=\sup_{J\in\mathscr{P}_f(I)}\left(\sum_{i\in J}u_i\right)$.
Lorsque la famille de réels positifs $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, on pose $\sum_{i\in I}u_i=+\infty$.

Remarque

Le cas où I est fini, c'est de l'algèbre et non de l'analyse.
Mais la définition reste valable (le $\sup$ est un $\max$) et les résultats qui suivent s'appliquent dans ce cas.

Propriété : Cas des séries

La famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{R}_*^+)^{\mathbb{N}}$ de réels positifs est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

Le cas échéant, les sommes $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ de la série de $\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$ de la famille sommable sont égales.

Démonstration

Si la famille est sommable, alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles est croissante et majorée par $\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$ donc la série converge et $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\leqslant\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$.

Si la série converge, alors, si J est une partie finie de $\mathbb{N}$, $N=\max J$, $\sum_{n\in J}u_n\leqslant S_N\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ qui est fini et indépendant de J. Donc la famille est sommable et $\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n=\sup_{J\in\mathscr{P}_f(I)}\left(\sum_{n\in J}u_n\right)\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$.

On a bien lorsque c'est le cas $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$. □

Exercice

Montrer que la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de réels positifs est sommable si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}}u_{-n}$ le sont et, lorsque c'est le cas, $\sum_{n\in\mathbb{Z}}u_n=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n+\sum_{n=1}^{+\infty}u_{-n}$.

En effet, si la famille est sommable, alors les sommes partielles $\sum_{k=0}^{n}u_k$ et $\sum_{k=1}^{n}u_{-k}$ sont majorées et comme les séries sontà termes positifs, elles convergent. De plus $\sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=1}^{n} u_{-k} = \sum_{k=-n}^{n} u_k \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k$ donc $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n \geqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$.

Réciproquement, si les deux séries sont convergentes, alors pour tout I ensemble fini, il existe n tel que $I \subset [\![-n, n]\!]$ et donc $\sum_{n\in I} u_n$ est majoré par $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$ donc la famille est sommable et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$.

b Propriétés

Propriété

Si I est dénombrable.

- Si pour tout $i \in I$, $0 \leqslant a_i \leqslant b_i$ et $(b_i)_{i\in I}$ sommable, alors $(a_i)_{i\in I}$ sommable.
  Le cas échéant, $\sum_{i\in I} a_i \leqslant \sum_{i\in I} b_i$.
- Si $J \subset I$, et $(a_i)_{i\in I}$ sommable, alors $(a_i)_{i\in J}$ sommable.
  Le cas échéant, $\sum_{i\in J} a_i \leqslant \sum_{i\in I} a_i$.

Démonstration

Conséquence immédiate de la définition. □

Remarque

On pourrait définir la notion de sommabilité y compris si I est un ensemble quelconque. Mais on démontre alors que les termes non nuls sont en nombre au plus dénombrable.

En effet, si la famille de réels strictement $(u_i)_{i\in I}$ est sommable et $J = \{i \in I,\ u_i > 0\}$, soit $J_p = \left\{i \in J,\ u_i \geqslant \frac{1}{p}\right\}$ pour $p \in \mathbb{N}^*$. Alors $(u_i)_{i\in J_p}$ est sommable et $\sum_{i\in J_p} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i = S$.

Mais comme pour tout $i \in J_p$, $u_i \geqslant \frac{1}{p}$, nécessairement J_p est fini (car si on choisit $k \in \mathbb{N}$ éléments distincts dans J_p, on obtient $\frac{k}{p} \leqslant S$)

Or $J = \bigcup_{p=1}^{+\infty} J_p$ donc J est fini ou dénombrable.

Donc pour qu'une famille de réels positifs soit sommable, il est nécessaire que l'ensemble des indices des termes non nuls soit au plus dénombrable.

c Sommation par paquets

Théorème : sommation par paquets

Soit I un ensemble dénombrable, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une « partition » de I : $p \neq q \Longrightarrow I_p \cap I_q = \varnothing$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = I$ mais il peut y avoir des I_n vides. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs.

La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable,
- la série $\sum \left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$ converge.

Le cas échéant, $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$.

Remarques

R1 – Les I_n sont finis ou dénombrables. Si I_n est fini, $(u_i)_{i\in I_n}$ est automatiquement sommable.

R2 – S'il n'y a qu'un nombre fini de I_n non vides, alors la deuxième condition est automatiquement vérifiée.

R3 – Très intéressant : donne la sommabilité ET la somme.

Démonstration

Hors Programme. □

Exercices

Ex 1 – Retrouver le critère de sommabilité des suites indexées par $\mathbb{Z}$.

Ex 2 – Montrer que la famille $\left(\frac{1}{(m+n)^4}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2\setminus\{(0,0)\}}$ est sommable et exprimer sa somme comme somme d'une série.

On considère pour $p\in\mathbb{N}^*$, $I_p=\{(m,n)\in\mathbb{N}^2\setminus\{(0,0)\},\ m+n=p\}$ (on va sommer par diagonales). $(I_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est une partition de $\mathbb{N}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Pour tout $p\in I_p$, $\left(\frac{1}{(m+n)^4}\right)_{(m,n)\in I_p}$ est une famille contenant $|I_p|=p+1$ fois la valeur constante $\frac{1}{p^4}$. Donc $\left(\frac{1}{(m+n)^4}\right)_{(m,n)\in I_p}$ est sommable en tant que famille finie et la série $\sum_p\left(\sum_{i\in I_p}u_i\right)=\sum_p\frac{p+1}{p^4}$ converge donc la famille $\left(\frac{1}{(m+n)^4}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2\setminus\{(0,0)\}}$ est sommable et $\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2\setminus\{(0,0)\}}\frac{1}{(m+n)^4}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{p+1}{p^4}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^3}+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^4}$, les séries étant convergentes par critère de Riemann.

d Commutativité

Remarque

Une permutation de I est une bijection de I sur I.

Propriété

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs, I étant dénombrable. Soit $\sigma\in\mathfrak{S}(I)$ une permutation de I. Alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $(u_{\sigma(i)})_{i\in I}$ l'est. Et si c'est le cas,

$$\sum_{i\in I}u_i=\sum_{i\in I}u_{\sigma(i)}$$

Démonstration

Il suffit de remarquer que $\sigma(\mathscr{P}_f(I))=\mathscr{P}_f(I)$ par bijectivité, les sup des sommes sur les parties finies seront bien les mêmes. □

Propriété : sommabilité par indexation

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs, I étant dénombrable.
Soit $n\mapsto i_n$ une bijection de $\mathbb{N}$ sur I (i.e. une numérotation des éléments de I).
$(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}}u_{i_n}$ converge, et le cas échéant,

$$\sum_{i\in I}u_i=\sum_{n=0}^{+\infty}u_{i_n}.$$

Remarque

Et donc l'étude de la famille sommable se ramène à une étude de série !

Démonstration

Même principe que pour la sommabilité des termes généraux de séries.

Si la famille est sommable, alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_{i_k}$ est croissante et majorée par

$\sum_{i\in I} u_i$ car les $J_n = \{i_k,\ 0 \leqslant k \leqslant n\}$ sont finis, donc la série converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{i_n} \leqslant \sum_{i\in I} u_i$.

Si la série converge, alors, si J est une partie finie de I, $N = \max\{k,\ i_k \in J\}$, $\sum_{i\in J} u_i \leqslant S_N \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_{i_n}$ qui est fini et indépendant de J. Donc la famille est sommable et $\sum_{i\in I} u_i = \sup_{J\in\mathscr{P}_f(I)} \left(\sum_{i\in J} u_i\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_{i_n}$.

On a bien lorsque c'est le cas $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$. □

Corollaire

Si $\sum a_n$ est une série convergente à termes réels positifs et $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$, alors la série $\sum a_{\sigma(n)}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

3 Familles de réels quelconques ou de complexes

a Définition, somme

Définition : Famille sommable

Soit I un ensemble dénombrable et $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$.
On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable lorsque la famille de réels positifs $(|u_i|)_{i\in I}$ l'est.

Remarque

Définition théorique... Mais comment définir la somme ? Comme pour les séries...

Remarque : (Rappel) Parties positive et négative d'un réel

Si $x \in \mathbb{R}$, $x^+ = \max(0, x)$ et $x^- = \max(0, -x)$. Alors $x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$.

Propriété

Soit I un ensemble dénombrable et $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$.
Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors les deux familles $\left(u_i^+\right)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ et $\left(u_i^-\right)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ le sont.

Remarque

La réciproque est vraie, voir linéarité plus loin.

Démonstration

Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, $0 \leqslant u_i^+ \leqslant |u_i|$ et $0 \leqslant u_i^- \leqslant |u_i|$. donc $\left(u_i^+\right)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ et $\left(u_i^-\right)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ le sont. □

Définition : Somme dans le cas réel

Soit I un ensemble dénombrable et $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ une famille sommable.
On définit la somme $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-$.

Propriété

Soit I un ensemble dénombrable et $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$.
Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors les deux familles $(\mathfrak{Re}(u_i))_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ et $(\mathfrak{Im}(u_i))_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ le sont.

Remarque

La réciproque est vraie, voir linéarité plus loin.

Démonstration

Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, $0 \leqslant |\mathfrak{Re}\, u_i| \leqslant |u_i|$ et $0 \leqslant |\mathfrak{Im}\, u_i| \leqslant |u_i|$. □

Définition : Somme dans le cas complexe

Soit I un ensemble dénombrable et $(u_j)_{j\in I} \in \mathbb{C}^I$ une famille sommable.
Si la famille $(u_j)_{j\in I}$ est sommable, les deux familles $\left(\mathfrak{Re}(u_j)\right)_{j\in I} \in \mathbb{R}^I$ et $\left(\mathfrak{Im}(u_j)\right)_{j\in I} \in \mathbb{R}^I$ le sont.
Cela permet de définir la somme $\sum_{j\in I} u_j = \sum_{j\in I} \mathfrak{Re}(u_j) + \mathrm{i} \sum_{j\in I} \mathfrak{Im}(u_j)$.

Propriété : Cas des séries

La famille $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de nombres réels ou complexes est sommable si et seulement si la série $\sum u_i$ est absolument convergente.
Sa somme est alors la somme de la série $\sum u_i$.

Démonstration

Par définition, $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si $(|u_i|)_{i\in\mathbb{N}}$ l'est. En tant que famille à termes réels positifs, $(|u_i|)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si $\sum |u_i|$ converge.
Donc $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum u_i$ est absolument convergente.
De plus, la définition de la somme d'une famille sommable donnée précédemment correspond à la définition de la somme de la série. □

b Sommation par paquets

Théorème : sommation par paquets

Soit I un ensemble dénombrable, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une « partition » de I :

$$p \neq q \Rightarrow I_p \cap I_q = \varnothing \quad \text{et} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = I$$

Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels ou complexes sommable alors

C1 Pour tout n, $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable.

C2 $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i\in I_n} u_i \right)$ converge

C3 $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i\in I_n} u_i \right)$

Remarque

La sommabilité se vérifie en général en appliquant le théorème de sommation par paquets à la famille de réels positifs $(|u_i|)_{i\in I}$. Dans ce cas, on peut aussi sommer par paquets la famille $(|u_i|)_{i\in I}$.

Démonstration

Hors programme □

Théorème : sommation par paquets (bis)

Soit I un ensemble dénombrable, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une « partition » de I :

$$p \neq q \Rightarrow I_p \cap I_q = \varnothing \quad \text{et} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = I$$

Si

H1 Pour tout n, $(|u_i|)_{i\in I_n}$ est sommable.

H2 $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i\in I_n} |u_i| \right)$ converge.

Alors

C1 La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.

C2 Pour tout n, $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable.

C3 $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i\in I_n} u_i \right)$ converge

C4 $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i\in I_n} u_i \right)$

c Commutativité

Propriété

Soit I est un ensemble dénombrable et $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres réels ou complexes.
Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(I)$ une permutation de I.
Alors $(u_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est sommable, et $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}$.

Démonstration

Déjà connu pour les réels positifs. On l'applique à u_i^+ et u_i^- dans le cas réel pour obtenir l'égalité, puis à $\mathfrak{Re}\, u_i$ et $\mathfrak{Im}\, u_i$ dans le cas complexe, en revenant à la définition de la somme de la famille sommable. □

Propriété

Soit I est un ensemble dénombrable et $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres réels ou complexes , $k \mapsto i_k$ une bijection de $\mathbb{N}$ sur I.
La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_{i_k}$ est absolument convergente, et si c'est le cas, on a $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{i_k}$.

Démonstration

Idem. □

Corollaire

Si $\sum a_n$ est une série convergente à termes réels ou complexes et $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$, alors la série $\sum a_{\sigma(n)}$ converge absolument et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

d Linéarité

Propriété

Si I est un ensemble dénombrable, si $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sont deux familles sommables d'éléments de $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), si $\lambda\in\mathbb{K}$, la famille $(\lambda u_i+v_i)_{i\in I}$ est sommable, et

$$\sum_{i\in I}(\lambda u_i+v_i)=\lambda\sum_{i\in I}u_i+\sum_{i\in I}v_i$$

Démonstration

Si $k\mapsto i_k$ une bijection de $\mathbb{N}$ vers I (numérotation de I).

Alors $(\lambda u_i+v_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}(\lambda u_{i_k}+v_{i_k})$ converge absolument. C'est le cas car les séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}u_{i_k}$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}v_{i_k}$ convergent absolument.

Et de plus, $\sum\limits_{i\in I}(\lambda u_i+v_i)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_{i_n}+v_{i_n})=\lambda\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_{i_n}+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}v_{i_n}=\lambda\sum\limits_{i\in I}u_i+\sum\limits_{i\in I}v_i$. □

IV Sommes doubles : le cas où $I=\mathbb{N}^2$

1 Sommes doubles de réels positifs

Théorème : de Fubini

Soit $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs.

Alors $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si

H1 Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la série $\sum\limits_m a_{m,n}$ converge.

H2 La série $\sum\limits_n\left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty}a_{m,n}\right)$ converge.

si et seulement si

H'1 Pour tout $m\in\mathbb{N}$, la série $\sum\limits_n a_{m,n}$ converge.

H'2 La série $\sum\limits_m\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_{m,n}\right)$ converge.

Le cas échéant, $\sum\limits_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}a_{m,n}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty}a_{m,n}\right)=\sum\limits_{m=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_{m,n}\right)$

Démonstration

C'est le théorème de sommation par paquets avec $I_n=\{(m,n),\ m\in\mathbb{N}\}$ qui partitionne $\mathbb{N}^2$. □

Remarque

Ce n'est pas la seule façon de procéder.

On peut former d'autres paquets, en sommant par exemple par diagonales au lieu de sommer par lignes ou par colonnes et obtenir des énoncés analogues.

Exemples

E1 – Sommabilité et somme de $\left(\dfrac{1}{(mn)^2}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}_*^2}$.

(Voir généralisation ci-après : sommes doubles produits)

À $n\in\mathbb{N}$ fixé, $\sum\limits_m\dfrac{1}{(mn)^2}$ converge vers $\dfrac{\pi^2}{6m^2}$, terme général d'une série convergente d'où la sommabilité et la somme vaux $\dfrac{\pi^4}{36}$.

E2 – $\left(\dfrac{1}{m^2+n^2}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}_*^2}$ n'est pas sommable.

À $n\in\mathbb{N}$ fixé, $\sum_m \dfrac{1}{m^2+n^2}$ converge. Soit $s_n=\sum_{m=1}^{+\infty}\dfrac{1}{m^2+n^2}$. $\sum s_n$ divergente ?

On peut comparer à une intégrale : $\sum_{m=1}^{+\infty}\dfrac{1}{m^2+n^2}\geqslant\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{t^2+n^2}\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{n}\left[\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{t}{n}\right)\right]_1^{+\infty}=\dfrac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}\frac{1}{n}}{n}\geqslant\dfrac{\pi}{4n}$ terme général positif de série divergente.

Autre solution : remarquer que $m^2+n^2\leqslant(m+n)^2$ donc $\dfrac{1}{m^2+n^2}\geqslant\dfrac{1}{(m+n)^2}$ et vérifions que la famille de réels positifs $\left(\dfrac{1}{(m+n)^2}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}_*^2}$ n'est pas sommable.

En effet, sommation par diagonale : $I_p=\{(m,n)\in\mathbb{N}_*^2,\ m+n=p\}$ partitionnent $\mathbb{N}_*^2$.

$\sum_{(m,n)\in I_p}\dfrac{1}{(m+n)^2}=\dfrac{|I_p|}{p^2}=\dfrac{p-1}{p^2}\sim\dfrac{1}{p}$ terme général de série divergente.

Exercice

1. Pour quelles valeurs du réel α la famille $\left(\dfrac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}_*^2}$ est-elle sommable ?
2. Démontrer que, pour tous m et n positifs, $\dfrac{1}{2}(m+n)^2\leqslant m^2+n^2\leqslant(m+n)^2$.
3. Étudier la sommabilité de la suite double $\left(\dfrac{1}{(m+n)^\beta}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}_*^2}$ suivant les valeurs du réel β. Retrouver le résultat de la première question.

---

1. On fixe $n\in\mathbb{N}$. $0\leqslant\dfrac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\underset{m\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{m^{2\alpha}}$ donc $\sum_m\dfrac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha>\dfrac{1}{2}$.

   Lorsque c'est le cas, on pose $u_m=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}$.

   On cherche une condition sur α pour que la série $\sum u_n$ converge.

   On compare à une intégrale, par décroissance et continuité de $t\mapsto\dfrac{1}{(t^+n^2)^\alpha}$ sur $[1,+\infty[$.

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{(t^2+n^2)^\alpha}\,\mathrm{d}t\leqslant u_n\leqslant\frac{1}{(1+n^2)^\alpha}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{(t^2+n^2)^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

   Or $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{(t^+n^2)^\alpha}\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{n^{2\alpha}}\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{\left(\left(\frac{t}{n}\right)^2+1\right)^\alpha}\,\mathrm{d}t\underset{t=nu}{=}\dfrac{1}{n^{2\alpha-1}}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\dfrac{1}{(u^2+1)^\alpha}\,\mathrm{d}t\sim\dfrac{1}{n^{2\alpha-1}}\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{(u^2+1)^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

   Comme $\dfrac{1}{(1+n^2)^\alpha}=\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^{2\alpha-1}}\right)$, on en déduit que $u_n\sim\dfrac{C}{n^{2\alpha-1}}$ avec $C=\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{(u^2+1)^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

   Et donc il y a sommabilité si et seulement si $\alpha>\dfrac{1}{2}$ et $2\alpha-1>1$ si et seulement si $\alpha>1$.
2. Facile.
3. Comme dans l'exemple précédent, par diagonales. $I_p=\{(m,n)\in\mathbb{N}_*^2,\ m+n=p\}$ partitionnent $\mathbb{N}_*^2$.

   $\sum_{(m,n)\in I_p}\dfrac{1}{(m+n)^\beta}=\dfrac{|I_p|}{p^\beta}=\dfrac{p-1}{p^\beta}\sim\dfrac{1}{p^{\beta-1}}$ terme général de série convergente si et seulement si $\beta>2$.

   On a alors $\dfrac{2^\alpha}{(m+n)^{2\alpha}}\leqslant\dfrac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\leqslant\dfrac{1}{(m+n)^{2\alpha}}$.

   L'inégalité de droite permet de conclure la sommabilité dans le cas où $\alpha>1$ et celle de droite la non sommabilité dans le cas où $\alpha<1$.

Remarque

Assez souvent, on utilise le résultat plus simplement : on a à manipuler une quantité qui est déjà donné sous forme de somme de série. On fait apparaître une série double, la sommabilité est automatique en cas de positivité, et on peut échanger les sommes par le théorème.

Exemple

Si $x>1$, $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$. Or $\frac{1}{n^x}=\frac{n}{n^{x+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^{x+1}}$.

Donc $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^{x+1}}$ existe bien.

Donc $(u_{k,n})_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ où $u_{k,n}=\frac{1}{n^{x+1}}$ si $1\leqslant k\leqslant n$ et 0 sinon est sommable (les termes sont réels positifs) et par le théorème de Fubini, $\zeta(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n^{x+1}}$.

2 Sommes doubles de réels ou de complexes

Théorème : de Fubini

Soit $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels ou de complexes.

Si $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable (c'est-à-dire si $(|a_{m,n}|)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ l'est, par exemple avec le théorème de Fubini précédent) alors $\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}a_{m,n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}a_{m,n}\right)=\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_{m,n}\right)$.

Démonstration

De nouveau de la sommation par paquets. □

Exemple : Les deux membres peuvent exister sans être égaux, attention aux conclusions trop hâtives.

On définit $u_{p,q}=\frac{1}{p^2-q^2}$ si $p\neq q$ et 0 sinon.

Il est clair, par comparaison (équivalent) à une série de Riemann, que pour tout q la série $\sum_{p\neq q}u_{p,q}$ converge.

Notons

$$\sigma_q=\sum_{\substack{p=1\\p\neq q}}^{+\infty}u_{p,q}$$

et essayons de calculer σ_q. Pour cela, on peut penser à se servir de la décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{p^2-q^2}=\frac{1}{2q}\left(\frac{1}{p-q}-\frac{1}{p+q}\right)$$

On peut regarder

$$\sigma_1=\frac{1}{2}\sum_{p=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p+1}\right)=$$

(télescopisme pas trop compliqué) ; si $q>1$, c'est un peu plus alambiqué, on ne peut guère échapper aux sommes partielles (pour ne pas couper en deux séries divergentes) : en supposant $N>q$,

$$\begin{aligned}\sigma_q^{(N)}&=\frac{1}{2q}\left(\sum_{p=1}^{q-1}\left(\frac{1}{p-q}-\frac{1}{p+q}\right)+\sum_{p=q+1}^{N}\left(\frac{1}{p-q}-\frac{1}{p+q}\right)\right)\\&=\frac{1}{2q}\left(-\sum_{j=1}^{q-1}\frac{1}{j}-\sum_{j=q+1}^{2q-1}\frac{1}{j}+\sum_{j=1}^{N-q}\frac{1}{j}-\sum_{j=2q+1}^{q+N}\frac{1}{j}\right)\end{aligned}$$

On simplifie les deux premières sommes avec la troisième, en supposant $N-q>2q-1$ ce qui n'est pas gênant puisqu'on va prendre les limites quand
$N\to+\infty$:

$$\sigma_q^{(N)}=\frac{1}{2q}\left(\frac{1}{q}+\sum_{j=2q}^{N-q}\frac{1}{j}-\sum_{j=2q+1}^{q+N}\frac{1}{j}\right)$$

et enfin on simplifie les deux sommes restantes entre elles :

$$\sigma_q^{(N)}=\frac{1}{2q}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{2q}-\sum_{j=N-q+1}^{N+q}\frac{1}{j}\right)$$

La somme restante tend vers 0 quand $N\to+\infty$ (il n'est pas nécessaire pour cela d'avoir le développement asymptotique des sommes partielles de la série harmonique), donc

$$\sigma_q=\frac{3}{4q^2}$$

Conclusion : $\sum \sigma_q$ converge, et $\sum_{q=1}^{+\infty} \sigma_q = \frac{\pi^2}{8}$.

Mauvaise conclusion : C'est sommable.

Bonne conclusion : Ce n'est pas sommable, car en échangeant les rôles de p et de q, on va trouver $-\frac{\pi^2}{8}$ au lieu de trouver la même chose.

Chemin plus court pour arriver à la bonne conclusion : prendre $p = n$ et $q = n-1$.

3 Cas particulier : suites doubles produits

Corollaire

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels ou complexes. Alors la suite double $(u_m v_n)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si (soit l'une des suites est nulle, soit les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes).

Lorsque la dernère condition est vérifiée, on a en outre

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} u_m v_n = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_m\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)$$

Remarque

L'hypothèse de suites non nulles est juste là pour avoir une caractérisation de la sommabilité. Pour le sens $\Longleftarrow$ intéressant dans la pratique pour calculer la somme, on peut l'oublier.

4 Produit de Cauchy

Corollaire

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries réelles ou complexes absolument convergentes. On note, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

$\sum w_n$ est absolument convergente, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

Démonstration

Il s'agit de la sommabilité de la suite double produit $(u_p v_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ avec une sommation par diagonale d'une part, et en utilisant le corollaire précédent d'autre part. □

Exemple

Si $z, z' \in \mathbb{C}$, $\exp(z+z') = \exp z \times \exp z'$.

En effet, les séries de termes généraux $\frac{z^n}{n!}$ et $\frac{z'^n}{n!}$ convergent absolument et

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\frac{z'^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k z'^{n-k} = \frac{(z+z')^n}{n!}.$$

Exemple

Si $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$, alors $\frac{1}{(1-a)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a^n$.

En effet, c'est le produit de Cauchy de la série géométrique absolument convergente de terme général a^n avec elle-même.

Remarque

L'hypothèse d'absolue convergence est indispensable, le résultat n'est pas assuré pour des séries semi-convergentes.

Exemple

Si $u_n = v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, alors $|w_n| = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = 1$. Donc $\sum w_n$ diverge grossièrement.