chapitreXVI

Intégrales à paramètres

I Rappel : limite d'une intégrale à paramètre

Théorème : Extension du théorème de convergence dominée

Soit I et J des intervalles, $a \in \overline{J}$ éventuellement infini et $f : \left| \begin{array}{ccc} J \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$

On suppose

H1 *Pour tout $x \in J$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I.*

H2 *Pour tout $t \in I$, $f(x,t) \xrightarrow[x \to a]{} h(t)$ avec h continue par morceaux sur J.*

H3 ***Hypothèse de domination*** *: Il existe une fonction $\phi \in \mathscr{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$ intégrable sur I telle que*

$$\forall x \in J,\ \forall t \in I, \quad |f_x(t)| = |f(x,t)| \leqslant \phi(t)$$

Alors

C1 *Les $t \mapsto f(x,t)$ et h sont intégrables sur I.*

C2 $\displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to a]{} \int_I h(t)\,\mathrm{d}t.$

II Continuité d'une intégrale à paramètre

Théorème : Continuité d'une intégrale à paramètre

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ et I un intervalle réel et $f : \left| \begin{array}{ccc} X \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$ *On suppose*

H1 $\forall t \in I,\ x \mapsto f(x,t)$ *est continue sur X.*

H2 $\forall x \in X,\ t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_m(I)$.

H3 ***Hypothèse de domination*** *: Il existe une fonction $\phi \in \mathscr{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$ intégrable sur I telle que*

$$\forall x \in X,\ \forall t \in I, \quad |f(x,t)| \leqslant \phi(t)$$

Alors

C1 $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ *est définie et continue sur X.*

Théorème : Extension par domination locale

*On peut remplacer **H3** par*

H3 Hypothèse de domination locale *: Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V de x et une fonction $\phi_V \in \mathscr{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$ intégrable sur I telle que*

$$\forall x' \in V,\ \ \forall t \in I,\ \ |f(x',t)| \leqslant \phi_V(t)$$

ou bien pour tout segment S de X, il existe une fonction $\phi_S \in \mathscr{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$ intégrable sur I telle que

$$\forall x \in S,\ \ \forall t \in I,\ \ |f(x,t)| \leqslant \phi_S(t)$$

III Dérivabilité d'une intégrale à paramètre

Théorème : Classe $\mathscr{C}^1$ d'une intégrale à paramètre

Soit I et J des intervalles réels et $f : \left| \begin{array}{ccc} J \times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array} \right.$ *On suppose*

H1 $\forall t \in I,\ x \mapsto f(x,t)$ *est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J, de dérivée* $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$.

H2 $\forall x \in J,\ t \mapsto f(x,t)$ *est intégrable sur I.*

H3 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *vérifie toutes les hypothèses du théorème de continuité :*

(1) $\left[\forall t \in I,\ x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right.$ *est continue sur J*$\Big]$ *déjà dans* **H1** !

(2) $\forall x \in J,\ t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ *continue par morceaux sur I*

(3) ***Hypothèse de domination*** *globale ou sur tout segment de* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *: Éventuellement sur tout segment S, il existe une fonction $\phi \in \mathscr{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$ intégrable sur J telle que*

$$\forall x \in J \text{ ou } S,\ \forall t \in I, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \phi(t).$$

Alors

C1 $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ *est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J*

C2 $\forall x \in J,\ t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ *est intégrable sur I et*

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème : Classe $\mathscr{C}^k$ d'une intégrale à paramètre

Soit I et J des intervalles réels et $f : \begin{array}{ccc} J\times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$ et $k\in\mathbb{N}^*$. On suppose

H1 Pour tout $t\in I$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J, de dérivée d'ordre j notée $x\mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$.

H2 Pour tout entier $j\in[\![0,k-1]\!]$, pour tout $x\in J$, $t\mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est ***intégrable*** sur I.

H3 $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ vérifie toutes les hypothèse du théorème de continuité :

(1) [Pour tout $t\in I$, $x\mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue sur J] déjà dans **H1** !

(2) Pour tout $x\in J$, $t\mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ continue par morceau sur I

(3) ***Hypothèse de domination*** globale ou sur tout segment de $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$: Éventuellement sur tout segment S, il existe une fonction $\phi\in\mathscr{C}_m(I,\mathbb{R}^+)$ intégrable sur J telle que

$$\forall x\in J \text{ ou } S,\ \forall t\in I,\quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right|\leqslant \phi(t).$$

Alors

C1 $g : x\mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J

C2 $\forall j\in[\![1,k]\!]$, $\forall x\in J$, $t\mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est intégrable sur I et

$$g^{(j)}(x)=\int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

En l'appliquant pour tout $k\in\mathbb{N}$, on obtient un théorème de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Corollaire : Classe $\mathscr{C}^\infty$ d'une intégrale à paramètre

Soit I et J des intervalles réels et $f : \begin{array}{ccc} J\times I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}$ On suppose

H1 Pour tout $t\in I$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur J.

H2 Pour tout $x\in J$, $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I.

H3 $\boxed{\text{Pour tout } k\in\mathbb{N}^*,}$ $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ vérifie toutes les hypothèse du théorème de continuité :

(1) [Pour tout $t\in I$, $x\mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue sur J] déjà dans **H1** !

(2) Pour tout $x\in J$, $t\mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ continue par morceau sur I

(3) ***Hypothèse de domination*** globale ou sur tout segment de $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$: Éventuellement sur tout segment S, il existe une fonction $\phi\in\mathscr{C}_m(I,\mathbb{R}^+)$ intégrable sur J telle que

$$\forall x\in J \text{ ou } S,\ \forall t\in I,\quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right|\leqslant \phi(t).$$

Alors

C1 $g : x\mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur J

C2 $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\forall x\in J$, $t\mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est intégrable sur I et

$$g^{(k)}(x)=\int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$