

chapitre XV

Limites d'intégrales

I Intersion limites et intégrales

1 Rappel : le cas de la convergence uniforme sur un segment

Théorème : Intersion limite et intégrale par convergence uniforme sur un segment

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^{[a, b]}$ tel que

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$.

H2 La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Alors

C1 f est continue sur $[a, b]$

C2 $\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$

2 Théorème de convergence dominée

Théorème : de convergence dominée

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I , à valeurs réelles ou complexes.

On suppose

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I .

H2 La suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux.

H3 Hypothèse de domination : Il existe une fonction $\phi \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$ intégrable sur I telle que

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |f_n(t)| \leq \phi(t)$

C1 Les f_n et f sont intégrables sur I .

C2 $\int_I f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f.$

3 Extension du théorème

Théorème : Extension du Théorème de Convergence Dominée

Soit J intervalle, $\lambda_0 \in \bar{J}$ éventuellement infini. Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in J}$ une famille de fonctions définies sur un intervalle I , à valeurs réelles ou complexes.

On suppose

H1 Pour tout $\lambda \in J$, f_λ est continue par morceaux sur I .

H2 Pour tout $x \in I$, $f_\lambda(x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} f(x)$ avec f continue par morceaux sur I .

H3 Hypothèse de domination : Il existe une fonction $\phi \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+)$ intégrable sur I telle que

Alors $\forall \lambda \in J, \forall t \in I, |f_\lambda(t)| \leq \phi(t)$

C1 Les f_λ et f sont intégrables sur I .

C2 $\int_I f_\lambda \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} \int_I f.$

II Intersion série-intégrale

1 Rappel : convergence uniforme sur un segment

Théorème : Intersion série-intégrale sur un segment

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^{[a, b]}$ tel que

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$

H2 La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$

alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[a, b]$.

C2 $\sum \int_a^b f_n(t) dt$ converge

C3 $\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$

Démonstration

Hors-programme. □



2 Cas général

Théorème : Intersion séries-intégrales, convergence N_1

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (I^{\mathbb{R}})^{\mathbb{N}}$, à valeurs réelles ou complexes. On suppose

H1 La série $\sum f_n$ converge simplement sur I , et sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue par morceaux sur I .

H2 Chaque f_n est intégrable sur I (et donc en particulier continue par morceaux sur I).

H3 La série $\sum \int_I |f_n|$ converge.

Alors

C1 $\sum \int_I f_n$ converge

C2 $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I

C3 $\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$.

Démonstration

Hors programme. □



Méthode : Intersion séries-intégrales

Par ordre décroissant de fréquence, on dispose de trois méthodes principales.

1. Le théorème qui vient d'être vu, avec la convergence de $\sum N_1(f_n)$.
2. Si $I = [a, b]$ est un segment sur lequel les f_n sont continues, on peut regarder si $\sum f_n$ converge uniformément.

Le plus agréable serait qu'elle converge normalement^a, donc que $\sum N_{\infty}(f_n)$ converge.

3. Aucun des deux théorèmes précédents ne s'applique. Posant alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, on écrit, pour tout

$n \geq 0$, $S = \sum_{k=0}^n f_k + R_n$ avec des notations habituelles :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k.$$

Si on montre, par exemple avec l'aide du théorème de convergence dominée, que $\int_a^b R_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, c'est fini. (Pour cela il faut majorer $|R_n(t)|$, par exemple avec le théorème sur les séries alternées...)

On peut aussi envisager d'appliquer le théorème de convergence dominée à $\int_a^b S_n(t) dt$, lorsque l'on peut estimer, voire calculer $|S_n(t)|$.

^a. Et, en fait, lorsque c'est cas, comme $N_1 \leq (b-a)N_{\infty}$, le théorème précédent s'applique aussi, mais c'est plus long à rédiger.