

chapitre XIII

Régularité des suites et séries de fonctions

\mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} , I est un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux points, X une partie non vide \mathbb{R} .

Suites de fonctions

1 Intégration sur un segment

Théorème : Interverson limite et intégrale

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^{[a, b]}$ tel que

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$

H2 La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$

alors

C1 f est continue sur $[a, b]$

C2 $\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$



Méthode : Pour montrer qu'on n'a pas convergence uniforme...

Il suffit qu'on n'ait pas $\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$

Théorème : Convergence uniforme de primitive

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de \mathbb{K}^I , $a \in I$. On suppose que

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I .

H2 La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I .

Alors on pose $F_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t) dt$ l'unique primitive de f_n qui s'annule en a et

C1 f est continue sur I donc $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ unique primitive de f qui s'annule en a existe bien,

C2 $(F_n)_n$ converge uniformément vers F sur tout segment de I .

2 Dérivation

Théorème : Interverson limite et dérivée

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de \mathbb{K}^I . On suppose que

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe \mathcal{C}^1 sur I .

H2 La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur I .

H3 La suite $(f'_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction h .

Alors

C1 f est de classe \mathcal{C}^1 sur I .

C2 $f' = h$ c'est-à-dire $(\lim f_n)' = \lim f'_n$.

C3 $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I .

Théorème : Généralisation à la classe \mathcal{C}^k

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de \mathbb{K}^I , $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe \mathcal{C}^p sur I .

H2 Pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, la suite $(f_n^{(k)})_n$ converge simplement vers une fonction g_k sur I .

H3 La suite $(f_n^{(p)})_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g_p .

Alors

C1 $f = g_0$ est de classe \mathcal{C}^p sur I .

C2 Pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, $f^{(k)} = g_k$ c'est-à-dire $(\lim f_n)^{(k)} = \lim f_n^{(k)}$.

C3 Pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément sur tout segment de I .

Théorème : Généralisation à la classe \mathcal{C}^∞

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de \mathbb{K}^I . On suppose que

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe \mathcal{C}^∞ sur I .

H2 La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f sur I .

H3 Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g_k .

Alors

C1 f est de classe \mathcal{C}^∞ sur I .

C2 Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)} = g_k$ c'est-à-dire $(\lim f_n)^{(k)} = \lim f_n^{(k)}$.



II Séries de fonctions

Les théorèmes sur les séries de fonctions se déduisent directement des théorèmes sur les suites de fonctions en les appliquant aux suites de sommes partielles.

1 Intégration sur un segment

Théorème : Intéversion série-intégrale sur un segment

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^{[a,b]}$ tel que

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$

H2 La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$

alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[a, b]$.

C2 $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt$ converge.

C3 $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt$.

2 Primitives

Théorème : Intéversion série et primitive

Soient $(f_n)_n$ une suite de fonction de \mathbb{K}^I , $a \in I$. On suppose que

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I .

H2 La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur tout segment de I .

Alors on pose $F_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t) dt$ l'unique primitive de f_n qui s'annule en a et

C1 f est continue sur I donc $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ unique primitive de f qui s'annule en a existe bien,

C2 La série de fonctions $\sum F_n$ converge uniformément sur tout segment de I et $F = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n$.

3 Classe \mathcal{C}^p

Théorème : Classe \mathcal{C}^p d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de \mathbb{K}^I , $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe \mathcal{C}^p sur I .

H2 Pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge simplement sur I .

H3 La série de fonctions $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I .

Alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe \mathcal{C}^p sur I .

C2 Pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, $f^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$.

C3 Pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I .

Théorème : Classe \mathcal{C}^∞ d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de \mathbb{K}^I . On suppose que

H1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe \mathcal{C}^∞ sur I .

H2 La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I .

H3 Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série de fonctions $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I .

Alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur I .

C2 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$.