ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES 1

Thème

Le sujet proposait dans un premier temps trois exercices : le premier permettait de mettre en valeur les notions de normes équivalentes, le deuxième montrait l'importance de l'hypothèse de domination dans le théorème de continuité des fonctions définies par intégrales dépendant d'un paramètre et le troisième proposait le calcul simple d'une intégrale curviligne.

Dans un second temps, un problème étudiait les différentes convergences pour une série de fonctions et à l'aide de démonstrations de cours, d'exemples et contre-exemples. Il permettait enfin de comparer toutes ces convergences.

Observations générales

Cette épreuve diversifiée a permis aux candidats de faire la démonstration de leur savoir-faire sur de nombreux aspects du programme du concours.

Les candidats qui connaissaient leur cours ont été favorisés.

On demandait au candidat de faire preuve d'initiatives à travers la recherche d'exemples et de contre-exemples, il y avait peu de questions techniques ou calculatoires. Ainsi, la grande majorité des candidats ont réussi à traiter le sujet en entier.

Une observation de la part des correcteurs est le manque de rigueur :

- On utilise des théorèmes sans vérifier toutes les hypothèses, ou sans préciser quel théorème est utilisé. Le correcteur n'est pas là pour « deviner » ce que le candidat veut dire.
- Il manque souvent, dans les raisonnements, les implications.

Un effort a été fait cette année en ce qui concerne le soin apporté aux copies.

Ce sujet a permis de bien classer les candidats : la moyenne de 12,22 est très convenable et les notes sont bien étalées (écart-type de 4,12).

Erreurs les plus fréquentes

Pour la convergence uniforme : majoration dépendante de x.

Confusion entre suite et série de fonctions.

$\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$ équivaut à 1.

Définition imprécise de normes équivalentes.

Conclusion

L'attention des candidats est attirée sur le fait que les textes des sujets de mathématiques nécessitent une connaissance très précise des points fondamentaux du cours.

Sont ainsi valorisés :

- l'apprentissage du cours et en particulier les démonstrations des points importants, les exercices et exemples de base ;
- les qualités de rigueur et de clarté d'exposition que l'on peut attendre d'un futur ingénieur ;
- l'aptitude à savoir manipuler sa calculatrice ;
- le soin apporté à la présentation de son travail.

Un candidat de niveau moyen et qui a travaillé doit pouvoir obtenir la moyenne au moins.

Remarques détaillées par question

Exercice 1

1. Tous les critères pour démontrer une norme ne sont pas toujours vérifiés.
   On rencontre trop souvent : $\int_a^b |f'(t)|\,dt = 0 \Rightarrow f' = 0$ sans vérification des hypothèses.
   Dans la définition de normes équivalentes, les constantes doivent être **strictement positives**.
   On voit aussi : $\forall f \in E,\ \exists \alpha > 0,\ \exists \beta > 0,\ \alpha N_1(f) \leq N_2(f) \leq \beta N_1(f)$ mais alors, ce ne sont plus des constantes !
2. On attendait une réponse négative à l'aide d'un exemple.
   Trop de candidats ont assuré qu'ici E était de dimension finie !

Exercice 2

Dans la question 2, on rencontre la majoration : $\left|\dfrac{\arctan(xt)}{1+t^2}\right| \leq \dfrac{\pi}{2t^2}$ puis la fonction $t \mapsto \dfrac{\pi}{2t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$!

Quelques oublis de valeur absolue dans les hypothèses de domination.

Le calcul de $f_2(x) = \int_0^{+\infty} xe^{-xt}\,dt$ est souvent faux, les candidats oubliant de considérer le cas $x = 0$.

Exercice 3

Cet exercice facile a été assez peu traité par les candidats.
Beaucoup utilisent la formule de Green-Riemann qui n'est pas la plus naturelle et qui ne peut pas s'appliquer ici car les fonctions P et Q ne sont pas de classe C^1 en $(0,0)$.

Problème

1. Questions de cours.
   Quelques candidats confondent suite et séries de fonctions.
   Lorsqu'on utilise un théorème de comparaison de séries, il est important de préciser qu'il s'agit de séries à termes positifs.

2. Trop de majorations non uniformes (c'est-à-dire avec x) du reste.
   L'erreur la plus fréquente est : $\left|\sum_{n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \leq \sum_{n+1}^{\infty} |f_k(x)|$ sans préciser que cette inégalité est valable puisque la série de fonctions converge absolument.

3. On trouve parfois des majorations du type $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ pour justifier de la divergence absolue.
   Là encore, trop de majorations non uniformes du reste.

4. Question peu réussie. Il suffisait de choisir la série entière $\sum x^n$.
   Toutefois, il semble que deux points ne soient pas acquis :
   - Une série entière converge absolument en tout point de son intervalle ouvert de convergence.
   - Une série entière ne converge pas nécessairement sur son intervalle ouvert de convergence.

5. Question bien traitée. Toutefois, un candidat peut utiliser un théorème du programme (une suite convergente est bornée) sans avoir à le redémontrer.

6. Attention : il ne suffit pas que $f'(x_0) = 0$ pour que f atteigne son maximum en x_0.
   Erreur trop fréquente : $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ équivaut à 1 !!

7. Encore des soucis de majoration non uniforme du reste.
   La question 7c) semble être la plus difficile du sujet car il y a eu peu de bonnes réponses.

8. Cette question permettait de faire un bilan des questions précédentes ce qui n'a pas toujours été compris. Bien sûr, il n'était pas utile de tout redémontrer.
   En ce qui concerne la question c), les séries de Bertrand étant hors programme, on attendait une démonstration.

9. Question facile et très largement correctement traitée, même si on rencontre des CA $\Rightarrow$ CU ou des CU $\Rightarrow$ CA !