Vrai ou faux

1. Un fonction dérivable à droite et à gauche en un point est dérivable en ce point.
2. Pour toute fonction dérivable sur $[a,b]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$.
3. Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ à valeurs complexes telle que $f(a) = f(b)$, on peut appliquer le théorème de Rolle à $\mathfrak{Re} f$ et $\mathfrak{Im} f$ et en déduire que f' s'annule sur $]a,b[$.

1 CCINP 3 : Formule de Leibniz

Solution de 1 : CCINP 3 : Formule de Leibniz

1. g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
   On prouve, par récurrence, que :
   $\forall x \in \mathbb{R},\ g^{(k)}(x) = 2^k e^{2x}$ et $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\},\ h^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$.
2. g et h sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ donc, d'après la formule de Leibniz, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$:
   $f^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(n-k)}(x) h^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} e^{2x} \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}} = n! e^{2x} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k 2^{n-k}}{(n-k)!(1+x)^{k+1}}$.
3. Notons (P_n) la propriété :
   Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ sont n fois dérivables sur I alors, fg est n fois dérivable sur I et :
   $\forall x \in I,\ (fg)^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$.

   Prouvons que (P_n) est vraie par récurrence sur n.

   La propriété est vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$ (dérivée d'un produit).
   Supposons la propriété vraie au rang $n \geqslant 0$.

   Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions $n+1$ fois dérivables sur I.
   Les fonctions f et g sont, en particulier, n fois dérivables sur I et donc par hypothèse de récurrence la fonction fg l'est aussi avec $\forall x \in I,\ (fg)^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$.

   Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, les fonctions $f^{(n-k)}$ et $g^{(k)}$ sont dérivables sur I donc par opération sur les fonctions dérivables, la fonction $(fg)^{(n)}$ est encore dérivable sur I.
   Ainsi la fonction fg est $(n+1)$ fois dérivable et

   $$\forall x \in I,\ (fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + f^{(n-k)}(x) g^{(k+1)}(x) \right).$$

   En décomposant la somme en deux et en procédant à un décalage d'indice sur la deuxième somme, on obtient

   $$\forall x \in I,\ (fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

C'est-à-dire $(fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right) f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x)$ avec $\binom{n}{-1}=\binom{n}{n+1}=0$.

Or, en utilisant le triangle de Pascal, on a $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}$.

On en déduit que $(fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(x)g^{(k)}(x)$.

Donc (P_{n+1}) est vraie.

2 CCINP 4 : théorème de la limite de la dérivée

Solution de 2 : CCINP 4 : théorème de la limite de la dérivée

1. Théorème des accroissements finis :
   Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
   On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
   Alors $\exists\, c \in\,]a,b[$ tel que $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$.
2. On suppose que $f'(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell$.
   Soit $h \neq 0$ tel que $x_0+h \in [a,b]$.
   En appliquant le théorème des accroissements finis, à la fonction f, entre x_0 et x_0+h, on peut affirmer qu'il existe c_h strictement compris entre x_0 et x_0+h tel que $f(x_0+h)-f(x_0) = f'(c_h)h$.
   Quand $h \to 0$ (avec $h \neq 0$), on a, par encadrement, $c_h \to x_0$.
   Donc $\frac{1}{h}(f(x_0+h)-f(x_0)) = f'(c_h) \xrightarrow[x\to x_0]{} f'(x) = \ell$.
   On en déduit que f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$.

3. La fonction g proposée dans l'indication est évidemment dérivable sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.
   g est également dérivable en 0 car $\frac{1}{h}(g(h)-g(0)) = h\sin\left(\frac{1}{h}\right)$.
   Or $h\sin\left(\frac{1}{h}\right) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ car $\left|h\sin\left(\frac{1}{h}\right)\right| \leqslant |h|$. Donc, g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.
   Cependant, $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $g'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.
   $2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ (car $\left|2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant 2|x|$), mais $x \longmapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0.
   Donc g' n'a pas de limite en 0.

3 Très classique (jusqu'à 4.)

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les racines d'un polynôme pour qu'il soit scindé à racines simples.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé simple avec $\deg P \geqslant 2$. Montrer que P' est scindé simple.
3. Est-ce encore vrai sur $\mathbb{C}[X]$?
4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé avec $\deg P \geqslant 2$. Montrer que P' est scindé.
5. Avec les mêmes hypothèses montrer que plus généralement, si $(a,b) \neq (0,0)$, $aP + bP'$ est scindé.

Solution de 3 : Très classique (jusqu'à 4.)

5. Le résultat est immédiat si $a=0$ ou $b=0$. On suppose donc $a\neq 0$ et $b\neq 0$.

Sinon, sans perte de généralité, on peut supposer que $b=1$ (quitte à tout diviser par b).

Si P est scindé, il s'écrit $P=\lambda\prod_{k=1}^{n}(X-x_k)^{m_k}$ avec $x_1<\dots<x_n$ et comme dans la question précédente, chaque x_k est racine de P' de multiplicité m_k-1, ce qui donne $\deg P-n$ racines de $aP+P'$ comptées avec multiplicité. Il en manque encore n.

L'idée astucieuse est de considérer $f: x\mapsto P(x)\mathrm{e}^{ax}$ qui se dérive en $f': x\mapsto (P'(x)+aP(x))\mathrm{e}^{ax}$ possédant les mêmes zéros que $P'+aP$.

Or f s'annule en tous les x_k et possède une limite nulle soit en $+\infty$, soit en $-\infty$. En appliquant n fois le théorème de Rolle (éventuellement généralisé), on obtient n zéros distincts et distincts des x_k de f' donc les n racines qu'il nous manquait de $P'+aP$ qui est bien scindé.

4

Montrer que $\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$ est scindé à racines simples toutes dans $]-1,1[$.

5 Généralisations du théorème de Rolle

1. Si f est continue sur $[a,b[$, dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(x)\xrightarrow[x\to b]{} f(a)$, à valeurs réelles, montrer que la conclusion du théorème de Rolle tient toujours.
2. Soit $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dérivable et admettant une même limite (finie ou non) en $\pm\infty$. Montrer qu'il existe un réel c tel que $f'(c)=0$.
3. Soient $a\in\mathbb{R}$ et f continue sur $[a,+\infty[$, dérivable sur $]a,+\infty[$ telle que $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{} f(a)$. Montrer qu'il existe $c\in]a,+\infty[$ tel que $f'(c)=0$.

6 Dérivées successives d'arctangente

Montrer que pour tout $n\geqslant 1$, $\mathrm{Arctan}^{(n)}: x\mapsto \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$ où P_n est une fonction polynomiale scindée simple.

Solution de 6 : Dérivées successives d'arctangente

Utiliser une récurrence puis une généralisation du théorème de Rolle.

7 Théorème de Darboux

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable.

1. On suppose que $f'(a)$ et $f'(b)$ sont de signe contraire. Démontrer que f' s'annule sur $]a,b[$.
2. En déduire que la dérivée d'une fonction dérivable possède la propriété des valeurs intermédiaires.

Solution de 7 : Théorème de Darboux

1. On suppose, sans perte de généralités, que $f(a)>0$ et $f(a)<0$. On aimerait adapter la preuve du théorème de Rolle en distant que le maximum que f atteint en étant continue sur le segment $[a,b]$ est atteint dans $]a,b[$ mais on ne peut pas le dire directement car f' n'est pas supposée continue donc on ne peut pas conclure de l'hypothèse car f est strictement croissante au voisinage de a et strictement décroissante au voisinage de b.

   Cependant, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\xrightarrow[x\to a^+]{} f'(a)>0$ donc au voisinage de a, $f(x)-f(a)>0$ soit $f(x)>f(a)$ et de même, au voisinage de b, $f(x)>f(b)$ ce qui assure que ce maximum est atteint dans $]a,b[$. La condition nécessaire d'extremum local permet bien de conclure.

2. Si, plus généralement, f dérivable sur I, $a,b\in I$ distincts et m tel que $f'(a)<m<f'(b)$, alors $g=f-m\,\mathrm{id}$ est dérivable sur $[a,b]$ et la première question nous dit que g' s'annule donc que m est atteinte par f' sur $]a,b[$.

8 On se propose de démontrer l'inégalité des accroissements finis dans le cas complexe où f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, telle que $\left|f'\right|\leqslant k$ sur $]a,b[$.

Pour cela, on considère $\varphi : \left|\begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \mathfrak{Re}\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\overline{f(t)}\right) \end{array}\right.$.

Conclure en appliquant l'inégalité des accroissements finies réelle à φ.

9 Erreur dans l'interpolation de Lagrange

Soit P_n polynôme d'interpolation de Lagrange interpolant une fonction f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ aux points $(x_0=a,x_1,\dots,x_n=b)$.

1. Montrer que

$$\forall\, x\in[a,b],\ \ \exists\,\xi_x\in[a,b],\ \ f(x)-P_n(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi_x).$$

Indication : s'inspirer de la démonstration du théorème des accroissements finis.

2. En déduire, si l'on note $M_{n+1}(f)=\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty$ et $T(x)=(x-x_0)\cdots(x-x_n)$,

$$\|f-P_n\|_\infty\leqslant\frac{M_{n+1}(f)}{(n+1)!}\,\|T\|_\infty\,.$$

Solution de 9 : Erreur dans l'interpolation de Lagrange

Soit $x\in[a,b]$, distinct des x_i (sinon, c'est immédiat, tous les ξ_x conviennent.).

Soit $\varphi\ :\ t\mapsto f(t)-P_n(t)-KT(t)$ où K est tel que $\varphi(x)=0$ (ce qui est possible car $T(x)\neq0$ car x n'est pas l'un des x_i.)

On a alors que φ est nulle en x et en tous les x_i, soit en $n+2$ points. Comme les fonctions qui la composent sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, φ est continue sur les segments et dérivables sur les $n+1$ intervalles ouverts successifs d'extrémités ces points, ce qui nous donne $n+1$ zéros distincts (dans $]a,b[$) de φ' en appliquant $n+1$ fois le théorème de Rolle.

En réitérant ce procédé à φ', puis φ'', *etc* jusqu'à $\varphi^{(n)}$, ce qui est possible car f donc φ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, on obtient par récurrence que pour tout $j\in[\![0,n+1]\!]$, φ^j admet $n+2-j$ zéros distincts (dans $]0,n[$). En particulier, $\varphi^{(n+1)}$ s'annule en un $\xi_x\in]a,b[$.

Or $\varphi^{(n+1)}=f^{(n+1)}-P_n^{(n+1)}-KT^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}-K(n+1)!$ car P_n est de degré au plus n et T est unitaire de degré $n+1$.

On a donc finalement que $K=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$ et donc $\boxed{f(x)-P_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}T(x).}$

10 Égalité de Taylor-Lagrange

Soit f de classe $\mathscr{C}^{(n+1)}$ sur I, $a,b\in I$. Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Solution de 10 : Égalité de Taylor-Lagrange

Poser $\varphi(x) = f(b) - \left(f(x) + f'(x)(b-x) + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n + A(b-x)^{n+1}\right)$ avec A tel que $\varphi(a) = 0$ et appliquer le théorème de Rolle puis conclure.

Ou bien poser $\varphi(x) = f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + A(x-a)^{n+1}\right)$ avec A tel que $\varphi(b) = 0$ et soit appliquer le théorème de Rolle puis une hypothèse de récurrence, soit n fois le théorème de Rolle.

11 Le but de l'exercice est de construire des fonction « plateau » de classe $\mathscr{C}^\infty$ nulles hors d'un segment $[a,b]$ et valant 1 sur un segment inclus dans $]a,b[$.

1. On définit, si $x > 0$, $\phi(x) = \exp(-1/x)$. Montrer que ϕ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et que sa dérivée k^{e} est de la forme $x \mapsto P_k(1/x)\exp(-1/x)$ où P_k polynomiale.
   On prolonge ϕ à $\mathbb{R}$ en définissant, si $x \leqslant 0$, $\phi(x) = 0$.
   Montrer que ϕ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
   Tracer l'allure du graphe de ϕ.
2. Tracer l'allure du graphe de $x \mapsto \phi(x+2)\phi(-1-x)$ puis de son unique primitive qui tends vers 0 en $-\infty$.
3. Construire ψ de classe $\mathscr{C}^\infty$, nulle en dehors de $[-2,2]$ et valant 1 sur $[-1,1]$.
4. Si $a < c < d < b$, comment construire une fonction $\mathscr{C}^\infty$, nulle en dehors de $[a,b]$ et valant 1 sur $[c,d]$?

Intégration sur un segment

1. Calculs de primitives et d'intégrales

12 Déterminer les primitives de fonctions données par les expressions suivantes, en précisant les intervalles de validité :

1. $(t+1)\operatorname{ch} t$
2. $t\sin^3 t$
3. $\dfrac{1}{\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}}$
4. $\dfrac{\ln t}{t + t\ln^2 t}$
5. $\dfrac{t^5}{1+t^{12}}$
6. $\dfrac{1}{t(t^2-1)}$
7. $\dfrac{1}{t^2 \pm 2t + 2}$
8. $\dfrac{t^4+1}{t^4-1}$
9. $\dfrac{1}{\mathrm{e}^t+1}$
10. $\dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2t}}}$
11. $\dfrac{\cos t}{1+\cos^2 t}$
12. $\dfrac{1}{\cos^3 t}$
13. $\dfrac{t}{1+\sqrt{t+1}}$
14. $\dfrac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$
15. $\dfrac{t+1}{\sqrt{2-t^2}}$
16. $\dfrac{1}{t+\sqrt{1+t^2}}$
17. $\dfrac{t}{\sqrt{(t-1)(3-t)}}$
18. $\dfrac{\operatorname{ch} t}{1+\operatorname{ch}^2 t}$
19. $\dfrac{1}{\operatorname{ch}^3 t}$
20. $\dfrac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t}$

Solution de 12 :

Indication :

1. IPP
2. IPP et transfromer $\sin^2$ et linéariser.
3. CV
4. CV
5. Direct
6. DES
7. Méthode classique
8. DES
9. $+\cdots-\cdots$ ou CV

Réponses :

1. $t \operatorname{sh} t - \mathrm{e}^{-t} + C$ ($\mathbb{R}$)
2. $\dfrac{1}{3} t \cos^3 t - t \cos t + \dfrac{2}{3} \sin t + \dfrac{1}{9} \sin^3 t + C$ ($\mathbb{R}$)
3. $2 \operatorname{Arctan} \sqrt{t} + C$ ($\mathbb{R}_*^+$)
4. $\dfrac{\ln(1 + \ln^2 t)}{2} + C$ ($\mathbb{R}_*^+$)
5. $\dfrac{\operatorname{Arctan} t^6}{6} + C$ ($\mathbb{R}$)
6. $\dfrac{\ln\left|t^2 - 1\right| - 2 \ln|t|}{2} + C_k$ ($I_1 =]-\infty, -1[$ ou $I_2 =]-1, 0[$ ou $I_3 =]0, 1[$ ou $I_4 =]1, +\infty[$)
7. $\dfrac{1}{2} \ln(t^2 + 2t + 2) - \operatorname{Arctan}(t + 1) + C$ (R) et $\operatorname{Arctan}(t - 1) + C$ ($\mathbb{R}$)
8. $t + \dfrac{1}{2} \ln\left|\dfrac{t-1}{t+1}\right| - \operatorname{Arctan} t + C_k$ sur $I_1 =]-\infty, -1[$ ou $I_2 =]-1, 1[$ ou $I_3 =]1, +\infty[$
9. $t - \ln\left(\mathrm{e}^t + 1\right)$
10. $t - \dfrac{1}{2} \ln\left(\mathrm{e}^{2t} + 1\right)$

13 Calculer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^\pi} \sin(\ln t)\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{3 + \cos^2 t}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{2 + \cos t}$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 + \sin t \cos t}$
5. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\operatorname{Arctan} t}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch} t}$
7. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{t}{t^3 + 1}\,\mathrm{d}t$
8. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t} + \sqrt{1-t}}$

2. Manipulations d'intégrales

14 Soit $f \in \mathscr{C}([0,1])$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

Solution de 14 :

Intégrer $g : t \mapsto f(t) - t$.

15 Soit $f \in \mathscr{C}([a,b], \mathbb{K})$, $a < b$. À quelle condition a-t-on $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$? si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

Dans le cas complexe, on pourra écrire $\displaystyle\int_a^b f = \left|\int_a^b f\right| \mathrm{e}^{i\theta}$...

16 Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la limite en $+\infty$ de $\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$.

Solution de 16 :

Appliquer le TAF à $\ln(f)$ sur $[x, x+1]$.

Réponse : e^α.

17 Montrer que $(I_n)_n = \left(\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^n}\right)_n$ converge vers une limite ℓ et donner un équivalent de $I_n - \ell$.

Solution de 17 :

Vérifier que $I_n \to 1$ (intuitif) en majorant $|I_n - 1|$.

Puis faire une IPP dans cette majoration.

Réponse : $\dfrac{\ln 2}{n}$.

18 Intégrales de Wallis

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t \, \mathrm{d}t$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t \, \mathrm{d}t$.

1. Comparer I_n et J_n.
2. Trouver une relation de récurrence vérifiée par (I_n).
3. En déduire une expression de I_n.
4. Étudier la monotonie de (I_n).
5. Que dire de la suite (nI_nI_{n-1}) ?
6. Montrer que $I_{n-2} \sim I_n$ puis que $I_{n-1} \sim I_n$.
7. En déduire un équivalent de I_n.

19 **Lemme de Grönwall**

Soient $f, g \in \mathscr{C}([0,+\infty[)$ telles que $f, g \geqslant 0$ et $C > 0$. On suppose que

$$\forall\, x \geqslant 0,\ \ f(x) \leqslant C + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $\forall\, x \geqslant 0,\ \ f(x) \leqslant C\mathrm{e}^{\int_0^x g(t)\mathrm{d}t}$.

Solution de 19 : Lemme de Grönwall

Étudier $h : x \mapsto \left(C + \displaystyle\int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{-\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t}$.

3. Intégrale dépendant des bornes

20 **CCINP 56**

21 Pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, on pose $I(x) = \displaystyle\int_{1/x}^x \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$. Calculer $I(x)$ pour $x > 0$ de trois manières différentes :

1. Changement de variable $t = \dfrac{1}{u}$ 2. Intégration par parties. 3. Étude de la fonction I.

22 Soit φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \dfrac{\operatorname{sh} t}{t}$ si $t \neq 0$ et $\varphi(0) = 1$ et $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_x^{2x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$.

1. Montrer que f est bien définie et étudier sa parité.
2. Justifier que f et dérivable et calculer f'.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Déterminer la limite en $+\infty$ de f et la branche infinie correspondante.
5. Déterminer un équivalent en $+\infty$ et retrouver le résultat de la question précédente.
6. Effectuer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de f.
7. Tracer le graphe de f.

4. Sommes de Riemann

23 Étudier convergence et limite des suites de terme général

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2}\cos\frac{k\pi}{n}$ 2. $\displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{n}{n^2+k^2}$ 3. $\displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{k}{n^2+k^2}$ 4. $\displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$ 5. $\displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^3+nk^2}$ 6. $\left(\dfrac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$

24 Déterminer un équivalent simple de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^n \sqrt{k}$.

25 **Oral Centrale** On désigne par z un nombre complexe de module différent de 1 ; on pose pour tout entier naturel k, $I_k = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}}{z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer, pour k entier naturel non nul, $I_k - zI_{k-1}$.
2. Calculer I_0 à l'aide de sommes de Riemann.
3. Calculer I_k pour tout k.

   Remarque : on pourrait calculer cette intégrale en multipliant numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée de celui-ci et en séparant partie réelle et partie imaginaire... mais ce serait certainement laborieux !
4. Faire dans I_1 le « changement de variable » $u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. Qu'en penser ?

26 **Oral Centrale** Soit f une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Déterminer la limite de la suite de terme général $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

5. Formules de Taylor

27 Soit $f \in \mathbb{K}^{\mathbb{R}}$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que f et f'' sont bornées. On note $M_0 = \|f\|_\infty$ et $M_2 = \left\|f''\right\|_\infty$.

1. Montrer que $\forall\, h > 0,\ \ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \ \left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{M_2 h}{2}$.

2. En déduire que f' est bornée, et, en notant $M_1 = \left\|f'\right\|_\infty$, $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$.

28 Soit $(a,b) \in R^2$ tel que $a < b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.

1. Justifier l'existence de $M = \sup_{[a,b]} \left|f''\right|$.
2. Soit $x \in [a,b]$. En appliquant à f la formule de Taylor avec reste intégrale sur $[x,a]$, puis sur $[x,b]$, montrer que $|f(x)| \leqslant \frac{M}{2}(b-x)(x-a)$.
3. En déduire que $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \dfrac{M(b-a)^3}{12}$.

29 Soit $a \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : [a-r, a+r] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^3$.

Calculer la limite de $\dfrac{1}{h^3}\left(f(a+3h) - 3f(a+2h) + 3f(a+h) - f(a)\right)$ lorsque $h \to 0$.