Dérivabilité

- Le théorème de Rolle est d'usage courant mais seulement valable pour les fonctions à valeurs réelles. Il existe des extensions en ouvrant des bornes et en remplaçant les valeurs par les limites (voir exercice 4).
- De même, le théorème des accroissements finis n'est plus valable si la fonction n'est pas à valeurs réelles. Mais l'inégalité est valable dans un cadre beaucoup plus large. Par contre il faut alors se limiter à des majorations.
- Le théorème « de la dérivée » est un théorème du prolongement $\mathscr{C}^1$. Mais attention : on ne prolonge pas une dérivée, on prolonge la fonction et on obtient sa dérivabilité au point.
- Un développement limité à l'ordre 1 donne la dérivabilité (et la dérivée) en un point. Ce n'est plus vrai à partir de l'ordre 2.

Vrai ou faux

1. Un fonction dérivable à droite et à gauche en un point est dérivable en ce point.
2. Pour toute fonction dérivable sur $[a,b]$, il existe $c\in[a,b]$ tel que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.
3. Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ à valeurs complexes telle que $f(a)=f(b)$, on peut appliquer le théorème de Rolle à $\mathfrak{Re}\,f$ et $\mathfrak{Im}\,f$ et en déduire que f' s'annule sur $]a,b[$.

1 CCINP 3 : Formule de Leibniz

2 CCINP 4 : théorème de la limite de la dérivée

3 Très classique (jusqu'à 4.)

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les racines d'un polynôme pour qu'il soit scindé à racines simples.
2. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ scindé simple avec $\deg P\geqslant 2$. Montrer que P' est scindé simple.
3. Est-ce encore vrai sur $\mathbb{C}[X]$?
4. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ scindé avec $\deg P\geqslant 2$. Montrer que P' est scindé.
5. Avec les mêmes hypothèses montrer que plus généralement, si $(a,b)\neq(0,0)$, $aP+bP'$ est scindé.

4

Montrer que $\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$ est scindé à racines simples toutes dans $]-1,1[$.

5 Généralisations du théorème de Rolle

1. Soit $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dérivable et admettant une même limite (finie ou non) en $\pm\infty$. Montrer qu'il existe un réel c tel que $f'(c)=0$.

2. Soient $a\in\mathbb{R}$ et f continue sur $[a,+\infty[$, dérivable sur $]a,+\infty[$ telle que $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}f(a)$. Montrer qu'il existe $c\in]a,+\infty[$ tel que $f'(c)=0$.

6 Dérivées successives d'arctangente

Montrer que pour tout $n\geqslant 1$, $\mathrm{Arctan}^{(n)} : x\mapsto \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$ où P_n est une fonction polynomiale scindée simple.

7 Théorème de Darboux

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable.

1. On suppose que $f'(a)$ et $f'(b)$ sont de signe contraire. Démontrer que f' s'annule sur $]a,b[$.
2. En déduire que la dérivée d'une fonction dérivable possède la propriété des valeurs intermédiaires.

8

On se propose de démontrer l'inégalité des accroissements finis dans le cas complexe où f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, telle que $|f'|\leqslant k$ sur $]a,b[$.

Pour cela, on considère $\varphi : \left|\begin{array}{ccc}[a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & \mathfrak{Re}\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\overline{f(t)}\right)\end{array}\right.$.

Conclure en appliquant l'inégalité des accroissements finies réelle à φ.

9 Erreur dans l'interpolation de Lagrange

Soit P_n polynôme d'interpolation de Lagrange interpolant une fonction f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ aux points $(x_0=a,x_1,\dots,x_n=b)$.

1. Montrer que
$$\forall\, x\in[a,b],\ \ \exists\,\xi_x\in[a,b],\ \ f(x)-P_n(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi_x).$$
Indication : s'inspirer de la démonstration du théorème des accroissements finis.
2. En déduire, si l'on note $M_{n+1}(f)=\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty$ et $T(x)=(x-x_0)\cdots(x-x_n)$,
$$\|f-P_n\|_\infty\leqslant\frac{M_{n+1}(f)}{(n+1)!}\|T\|_\infty.$$

10 Égalité de Taylor-Lagrange

Soit f de classe $\mathscr{C}^{(n+1)}$ sur I, $a,b\in I$. Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que
$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

11 Le but de l'exercice est de construire des fonction « plateau » de classe $\mathscr{C}^\infty$ nulles hors d'un segment $[a,b]$ et valant 1 sur un segment inclus dans $]a,b[$.

1. On définit, si $x>0$, $\phi(x)=\exp(-1/x)$. Montrer que ϕ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et que sa dérivée k^e est de la forme $x\mapsto P_k(1/x)\exp(-1/x)$ où P_k polynomiale.
   On prolonge ϕ à $\mathbb{R}$ en définissant, si $x\leqslant 0$, $\phi(x)=0$.
   Montrer que ϕ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
   Tracer l'allure du graphe de ϕ.
2. Tracer l'allure du graphe de $x\mapsto \phi(x+2)\phi(-1-x)$ puis de son unique primitive qui tends vers 0 en $-\infty$.
3. Construire ψ de classe $\mathscr{C}^\infty$, nulle en dehors de $[-2,2]$ et valant 1 sur $[-1,1]$.
4. Si $a<b<c<d$, comment construire une fonction $\mathscr{C}^\infty$, nulle en dehors de $[a,b]$ et valant 1 sur $[c,d]$?

INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

- Attention aux manipulations d'inégalités avec des intégrales : des erreurs fréquentes sont dues à l'oubli de la vérification de l'ordre des bornes.
- Bien connaître, bien sûr, primitives usuelles et techniques de primitivation.
- On ne sait pas encore étudier des fonctions intégrales si la variable n'apparaît pas que dans les bornes de l'intégrale. On fera donc en sorte que ce soit le cas (par changement de variable si besoin), et il faut alors savoir étudier ce type de fonctions !
- La principale difficulté pour les sommes de Riemann est de les reconnaître. La convergence s'applique dans le cours pour des fonctions continues. On cherchera dans la pratique à reconnaître une somme du type $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0,1,2\text{ ou }12\ldots}^{n-2,n-1\text{ ou }n+45\ldots} f\left(\frac{k}{n}\right)$ qui converge si f est continue sur $[0,1]$ vers $\displaystyle\int_0^1 f$.
- La formule de Taylor avec reste intégrale est à connaître PARFAITEMENT.

1. Calculs de primitives et d'intégrales

12 Déterminer les primitives de fonctions données par les expressions suivantes, en précisant les intervalles de validité :

1. $(t+1)\operatorname{ch} t$
2. $t\sin^3 t$
3. $\dfrac{1}{\sqrt{t}+\sqrt[3]{t}}$
4. $\dfrac{\ln t}{t+t\ln^2 t}$
5. $\dfrac{t^5}{1+t^{12}}$
6. $\dfrac{1}{t(t^2-1)}$
7. $\dfrac{1}{t^2\pm 2t+2}$
8. $\dfrac{t^4+1}{t^4-1}$
9. $\dfrac{1}{e^t+1}$
10. $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2t}}}$
11. $\dfrac{\cos t}{1+\cos^2 t}$
12. $\dfrac{1}{\cos^3 t}$
13. $\dfrac{t}{1+\sqrt{t+1}}$
14. $\dfrac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}$
15. $\dfrac{t+1}{\sqrt{2-t^2}}$
16. $\dfrac{1}{t+\sqrt{1+t^2}}$
17. $\dfrac{t}{\sqrt{(t-1)(3-t)}}$
18. $\dfrac{\operatorname{ch} t}{1+\operatorname{ch}^2 t}$
19. $\dfrac{1}{\operatorname{ch}^3 t}$
20. $\dfrac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t+\operatorname{ch} t}$

13 Calculer les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_1^{e^\pi}\sin(\ln t)\,dt$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,dt$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{2+\cos t}$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+\sin t\cos t}$
5. $\displaystyle\int_0^1\frac{\operatorname{Arctan} t}{(t+1)^2}\,dt$
6. $\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{\operatorname{ch} t}$
7. $\displaystyle\int_0^1\frac{t}{t^3+1}\,dt$
8. $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{dt}{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}}$

2. Manipulations d'intégrales

14 Soit $f\in\mathscr{C}([0,1])$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt=\frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

15 Soit $f\in\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$, $a<b$. À quelle condition a-t-on $\displaystyle\left|\int_a^b f\right|=\int_a^b |f|$ si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$? si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$?

Dans le cas complexe, on pourra écrire $\displaystyle\int_a^b f=\left|\int_a^b f\right|e^{i\theta}\ldots$

16 Soit $f:[0,+\infty[\to[0,+\infty[$ de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que $\displaystyle\frac{f'(x)}{f(x)}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\alpha\in\mathbb{R}$. Étudier la limite en $+\infty$ de $\displaystyle\frac{f(x+1)}{f(x)}$.

17 Montrer que $(I_n)_n=\left(\displaystyle\int_0^1\frac{du}{1+u^n}\right)_n$ converge vers une limite ℓ et donner un équivalent de $I_n-\ell$.

18 **Intégrales de Wallis**

On pose $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,dt$ et $J_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^n t\,dt$.

1. Comparer I_n et J_n.
2. Trouver une relation de récurrence vérifiée par (I_n).
3. En déduire une expression de I_n.
4. Étudier la monotonie de (I_n).
5. Que dire de la suite (nI_nI_{n-1}) ?
6. Montrer que $I_{n-2}\sim I_n$ puis que $I_{n-1}\sim I_n$.
7. En déduire un équivalent de I_n.

19 **Lemme de Grönwall**

Soient $f, g \in \mathscr{C}([0,+\infty[)$ telles que $f, g \geqslant 0$ et $C > 0$. On suppose que

$$\forall x \geqslant 0,\ \ f(x) \leqslant C + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $\forall x \geqslant 0,\ \ f(x) \leqslant C\mathrm{e}^{\int_0^x g(t)\mathrm{d}t}$.

3. Intégrale dépendant des bornes

20 **CCINP 56**

21 Pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, on pose $I(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$. Calculer $I(x)$ pour $x > 0$ de trois manières différentes :

1. Changement de variable $t = \dfrac{1}{u}$ 2. Intégration par parties. 3. Étude de la fonction I.

22 Soit φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \dfrac{\operatorname{sh} t}{t}$ si $t \neq 0$ et $\varphi(0) = 1$ et $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_x^{2x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$.

1. Montrer que f est bien définie et étudier sa parité.
2. Justifier que f et dérivable et calculer f'.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Déterminer la limite en $+\infty$ de f et la branche infinie correspondante.
5. Déterminer un équivalent en $+\infty$ et retrouver le résultat de la question précédente.
6. Effectuer un développement limité à l'ordre 3 en 0 de f.
7. Tracer le graphe de f.

4. Sommes de Riemann

23 Étudier convergence et limite des suites de terme général

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2}\cos\frac{k\pi}{n}$ 2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$ 3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$ 4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$ 5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^3+nk^2}$ 6. $\left(\dfrac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$

24 Déterminer un équivalent simple de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k}$.

25 **Oral Centrale** On désigne par z un nombre complexe de module différent de 1 ; on pose pour tout entier naturel k, $I_k = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}}{z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer, pour k entier naturel non nul, $I_k - zI_{k-1}$.
2. Calculer I_0 à l'aide de sommes de Riemann.
3. Calculer I_k pour tout k.
   Remarque : on pourrait calculer cette intégrale en multipliant numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée de celui-ci et en séparant partie réelle et partie imaginaire... mais ce serait certainement laborieux !
4. Faire dans I_1 le « changement de variable » $u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. Qu'en penser ?

26 **Oral Centrale** Soit f une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Déterminer la limite de la suite de terme général $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

5. Formules de Taylor

27 Soit $f \in \mathbb{K}^{\mathbb{R}}$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que f et f'' sont bornées. On note $M_0 = \|f\|_\infty$ et $M_2 = \|f''\|_\infty$.

1. Montrer que $\forall h > 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R},\ \ |f'(x)| \leqslant \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{M_2 h}{2}$.

2. En déduire que f' est bornée, et, en notant $M_1 = \|f'\|_\infty$, $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$.

28 Soit $(a,b) \in R^2$ tel que $a < b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.

1. Justifier l'existence de $M = \sup_{[a,b]} |f''|$.
2. Soit $x \in [a,b]$. En appliquant à f la formule de Taylor avec reste intégrale sur $[x,a]$, puis sur $[x,b]$, montrer que $|f(x)| \leqslant \frac{M}{2}(b-x)(x-a)$.
3. En déduire que $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \dfrac{M(b-a)^3}{12}$.

29 Soit $a \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : [a-r, a+r] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^3$.

Calculer la limite de $\dfrac{1}{h^3}(f(a+3h) - 3f(a+2h) + 3f(a+h) - f(a))$ lorsque $h \to 0$.