

Réduction (1^{re} partie)

- Méthodes générales :
 - * Regarder ce qui se passe en petite dimension (2 ou 3) permet parfois d'éclairer les choses.
 - * Pour les endomorphismes, une base bien adaptée au problème permet de le transformer en un problème simple. C'est le cas aussi si l'espace se décompose en somme directe de sous-espaces simples.
 - * En travaillant avec des matrices dans \mathbb{R} , passer dans \mathbb{C} permet d'avoir des propriétés intéressantes (pour trigonaliser par exemple).
- Détermination des éléments propres :
 - * Le polynôme caractéristique sert à déterminer les valeurs propres : il faut donc en donner une forme la plus factorisée possible. Si l'on calcule celui-ci par une méthode du pivot de Gauss en travaillant sur les lignes, les mêmes opérations permettent de déterminer les sous-espaces propres.
 - * Lorsqu'une matrice se présente par blocs, on aura souvent intérêt à chercher les vecteurs propres par blocs : pour résoudre $AX = \lambda X$ où $A = \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix}$, on écrira $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$.
- Diagonalisabilité :
 - * Avoir n valeurs propres distinctes en dimension n suffit.
 - * On peut ajouter les dimensions des sous-espaces propres (multiplicités géométriques) et comparer à la dimension de l'espace.
 - * Lorsque le polynôme caractéristique est scindé, il y a diagonalisabilité si et seulement si les dimensions de chaque sous-espace propre sont égales aux multiplicités des valeurs propres.
 - * On verra plus tard qu'une matrice symétrique **réelle** est automatiquement diagonalisable.
 - * Savoir diagonaliser complètement en petite dimension, et savoir en déduire puissance de matrice, terme général de suites récurrentes, commutant.
- Trigonalisation :
 - * Sur \mathbb{C} , c'est automatique. On effectue assez rarement des calculs explicites de trigonalisation.
 - * Mais le fait que toute matrice complexe soit trigonalisable est d'usage courant.
- Comme les sous-espaces propres sont toujours en somme directe, une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est automatiquement libre. Pratique!

Sauf mention contraire, \mathbb{K} désigne un sous-corps de \mathbb{C} , et n un entier naturel non nul.

1. Exercices cherchés en cours

1 Montrer que toute projection peut être représentée par une matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et

que toute symétrie peut être représentée par une matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$.

2 Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

1. Soit $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$. Montrer que H est stable par u .
2. Soit $x = (3, 2, 1)$ et $D = \text{Vect}(x)$. Montrer que D est stable par u .
3. Justifier que $\mathbb{R}^3 = D \oplus H$.

4. Déterminer une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, à coefficients entiers.

3 Montrer $(x \mapsto e^{\lambda x})_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est une famille libre.

4 CCINP 83 : valeur propre de composée

5 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que A et A^T ont même polynôme caractéristique.

6 Montrer qu'en dimension impaire, une matrice réelle a toujours au moins une valeur propre réelle.

7 CCINP 72 : endomorphismes de rang 0 ou 1

8 Que peut-on dire d'une matrice diagonalisable ayant une unique valeur propre ?

9 Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

10 CCINP 67 : diagonalisation dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}

11 CCINP 59

12 CCINP 69 : Rang et diagonalisabilité

13 CCINP 70 : réduction de matrice circulante

14 Matrices compagnes Calculer le polynôme caractéristique de la matrice compagne

$(a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix}$. Vérifier que ses sous-espaces propres sont des droites

puis montrer qu'elle est diagonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique est scindé simple.

15 Trouver le terme général des suites x, y, z telles que pour tout n , $\begin{cases} x_{n+1} = y_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}$

16 Trouver le commutant de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

17 CCINP 73 : Commutant d'une matrice 2×2

18 Trouver les racines carrées de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

19 Déterminer le terme général des suites complexes vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = -u_{n+2} - u_{n+1} - u_n$ en posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

20 $A = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -9 & -1 \end{pmatrix}$

1. A est-elle trigonalisable ? Diagonalisable ?
2. Trigonaliser (resp. diagonaliser) A si elle est trigonalisable (resp. diagonalisable).

2. Éléments propres et diagonalisation

21 1. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ a^2 - 7a & a - 7 & a \end{pmatrix}$ admet-elle une valeur propre double ? Pour ces valeurs, A est-elle diagonalisable ?

2. Soit $M = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -10 & -5 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

22 Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A .
2. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

23 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Déterminer le terme général des suites x, y, z définies par $x_0 = 1, y_0 = 0, z_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - 2(y_n + z_n) \\ y_{n+1} = x_n - z_n \\ z_{n+1} = 3x_n - 2y_n - z_n \end{cases}$$

1. Déterminer $\text{Ker } A$ et $\text{Im } A$.
2. Diagonaliser A .
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

24 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que tout vecteur non nul x soit un vecteur propre. Que dire de u ?

25 Déterminer le commutant et les racines carrées de la matrice $A = \begin{pmatrix} 8 & -10 & 10 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$.

26 Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si A^T l'est.

27 Déterminer les valeurs propres de la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$ (0)

28 Quelles sont les matrices élémentaires $E_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisables ?

29 Densité de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors pour $\lambda \in \mathbb{K}$ suffisamment proche de 0, $A - \lambda I_n \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est limite d'une suite de matrices de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ au sens où $A^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} A$ lorsque pour tout

$$(i, j), a_{i,j}^{(k)} \rightarrow a_{i,j}.$$

Retrouver le résultat en exploitant le fait que tout matrice de rang r est équivalente à J_r .

30 On souhaite démontrer que si

$$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \chi_{AB} = \chi_{BA}.$$

1. Montrer le résultat si on suppose de plus que $A \in \mathcal{GL}(\mathbb{K})$.

2. En déduire le résultat si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} en utilisant l'exercice précédent.

3. Retrouver le résultat dans le cas général en calculant le produit dans les deux sens de $\begin{pmatrix} A & XI_n \\ I_n & (0) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -B & XI_n \\ I_n & -A \end{pmatrix}$.

31 Matrices circulantes Soit $n \geq 2$.

1. Montrer que la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & (0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et la diagonaliser.

2. En déduire la déterminant dit circulant $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}$.

32 CCINP 63

33 Matrices de rang 1

1. Montrer que $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est de rang 1 si et seulement si elle peut s'écrire sous la forme XY^T où X, Y sont des colonnes non nulles de taille à déterminer. Comment s'exprime sa trace en fonction de X et Y ?
2. On suppose que $p = q$. Donner, suivant les valeurs de sa trace, les valeurs propres de A . Donner une CNS pour que A soit diagonalisable.

34 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

- Déterminer, sans calculer son polynôme caractéristique, les valeurs propres de la matrice A .
- Démontrer, sans déterminer ses sous-espaces propres, que A n'est pas diagonalisable.
- Justifier que A est trigonalisable, puis trigonaliser A .
- Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

35 Théorème de Gerschgorin En utilisant le résultat d'inversibilité des matrices à diagonale strictement dominante ($\forall i, |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$) ou le principe de sa démonstration, montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, chaque valeur propre complexe de A se trouve dans un disque de Gerschgorin de centre $a_{i,i}$ et de rayon $\sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.

Donner pour chaque valeur propre un disque de centre 0 dans lequel elle se trouve.

36 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $M = \begin{pmatrix} 3B & B \\ -2B & 0 \end{pmatrix}$.

- Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier que A est diagonalisable sur \mathbb{R} et la diagonaliser.
- En déduire que M est semblable à la matrice $M' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 2B \end{pmatrix}$.
- Démontrer que si B est diagonalisable, alors M est diagonalisable.

37 Soit A, B matrices carrées d'ordre p et q respectivement. On définit par blocs la matrice $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

- Montrer que M est diagonalisable (respectivement trigonalisable) si A et B le sont.
- Soit C à p lignes et q colonnes, $N = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

On suppose que A et B sont diagonalisables et n'ont aucune valeur propre commune. Montrer que N est diagonalisable et semblable à M . Préciser les sous-espaces propres de N .

38 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que M soit diagonalisable.

3. Matrices et endomorphismes nilpotents

39 Quelles sont les matrices nilpotentes diagonalisables ?

40 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $u : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{cases}$.

- Montrer que u est un endomorphisme nilpotent et donner son indice de nilpotence.
- Écrire la matrice A de u dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

41 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que u est nilpotent et déterminer son indice de nilpotence.

42 Montrer que sur \mathbb{C} , une matrice est nilpotente si et seulement si 0 est sa seule valeur propre. Est-ce encore vrai sur \mathbb{R} ?

43 Soit N une matrice carrée d'ordre n nilpotente.

- Montrer que $I_n - N$ et $I_n + N$ sont inversibles et calculer leurs inverses en fonction de N .
- En considérant le développement limité de $\sqrt{1+x}$ au voisinage de 0, déterminer une matrice M dont le carré est égal à $I_n + N$.
(On pourra montrer que si P est un polynôme tel que $P(x) = o_{x \rightarrow 0}(x^n)$, alors il existe Q tel que $P = X^n Q$ à l'aide d'une division euclidienne.)

44 Sous-espaces stables par un endomorphisme nilpotent Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice p .

- Justifier l'existence d'un vecteur $a \in E$ tel que $u^{p-1}(a) \neq 0$.
- Démontrer que $\mathcal{F} = (a, u(a), \dots, u^{p-1}(a))$ est une famille libre de E .
- Retrouver le fait que $p \leq n$.
- Dans cette question, on suppose que $p = n$.
 - Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
 - Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\dim \text{Ker } u^k = k$.
 - Soit F sous-espace de E stable par u de dimension $k \geq 1$. En considérant l'endomorphisme u_F induit par u sur F , montrer que $F = \text{Ker } u^k$.

45 Commutant d'un endomorphisme nilpotent Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$, et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice n .

- Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $\mathcal{B} = (a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est une base de E .
- Écrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B}' = (f^{n-1}(a), \dots, f(a), a)$.
- Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $u \circ v = v \circ u$ si et seulement si $v \in (\text{id}_E, f, \dots, f^{n-1})$.
Indication : on pourra introduire les coordonnées de $g(a)$ dans la base \mathcal{B} .

46 Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente si et seulement si pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\text{tr } A^k = 0$.