Réduction (1re partie)

- Méthodes générales :
  - ⋆ Regarder ce qui se passe en petite dimension (2 ou 3) permet parfois d'éclairer les choses.
  - ⋆ Pour les endomorphismes, une base bien adaptée au problème permet de le transformer en un problème simple. C'est le cas aussi si l'espace se décompose en somme directe de sous-espaces simples.
  - ⋆ En travaillant avec des matrices dans $\mathbb{R}$, passer dans $\mathbb{C}$ permet d'avoir des propriétés intéressantes (pour trigonaliser par exemple).
- Détermination des éléments propres :
  - ⋆ Le polynôme caractéristique sert à déterminer les valeurs propres : il faut donc en donner une forme la plus factorisée possible. Si l'on calcule celui-ci par une méthode du pivot de Gauss en travaillant sur les lignes, les mêmes opérations permettent de déterminer les sous-espaces propres.
  - ⋆ Lorsqu'une matrice se présente par blocs, on aura souvent intérêt à chercher les vecteurs propres par blocs : pour résoudre $AX = \lambda X$ où $A = \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix}$, on écrira $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$.
- Diagonalisabilité :
  - ⋆ Avoir n valeurs propres distinctes en dimension n suffit.
  - ⋆ On peut ajouter les dimensions des sous-espaces propres (multiplicités géométriques) et comparer à la dimension de l'espace.
  - ⋆ Lorsque le polynôme caractéristique est scindé, il y a diagonalisabilité si et seulement si les dimensions de chaque sous-espace propre sont égales aux multiplicités des valeurs propres.
  - ⋆ On verra plus tard qu'une matrice symétrique **réelle** est automatiquement diagonalisable.
  - ⋆ Savoir diagonaliser complètement en petite dimension, et savoir en déduire puissance de matrice, terme général de suites récurrentes, commutant.
- Trigonalisation :
  - ⋆ Sur $\mathbb{C}$, c'est automatique. On effectue assez rarement des calculs explicites de trigonalisation.
  - ⋆ Mais le fait que toute matrice complexe soit trigonalisable est d'usage courant.
- Comme les sous-espaces propres sont toujours en somme directe, une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est automatiquement libre. Pratique !

Sauf mention contraire, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, et n un entier naturel non nul.

1. Exercices cherchés en cours

1 Montrer que tout projection peut être représentée par un matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et que toute symétrie peut être représentée par un matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$.

2 Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

1. Soit $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$. Montrer que H est stable par u.
2. Soit $x = (3, 2, 1)$ et $D = \mathrm{Vect}(x)$. Montrer que D est stable par u.
3. Justifier que $\mathbb{R}^3 = D \oplus H$.
4. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans la quelle la matrice de u est diagonale par blocs, à cœfficients entiers.

3 Montrer $\left(x \mapsto e^{\lambda x}\right)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est une famille libre.

4 **CCINP 83 : valeur propre de composée**

5 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que A et $A^\intercal$ ont même polynôme caractéristique.

6 Montrer qu'en dimension impaire, un matrice réelle a toujours au moins une valeur propre réelle.

7 **CCINP 72 : endomorphismes de rang 0 ou 1**

8 Que peut-on dire d'une matrice diagonalisable ayant une unique valeur propre ?

9 Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

10 **CCINP 67 : diagonalisation dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$**

11 **CCINP 59**

12 **CCINP 69 : Rang et diagonalisabilité**

13 **CCINP 70 : réduction de matrice circulante**

14 **Matrices compagnes** Calculer le polynôme caractéristique de la matrice compagne $(a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K})$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & & a_{n-1} \end{pmatrix}$. Vérifier que ses sous-espaces propres sont des droites puis montrer qu'elle est diagonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique est scindé simple.

15 Trouver le terme général des suites x, y, z telles que pour tout n, $\begin{cases} x_{n+1} = y_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}$

16 Trouver le commutant de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

17 **CCINP 73 : Commutant d'une matrice 2×2**

18 Trouver les racines carrées de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

19 Déterminer le terme général des suites complexes vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = -u_{n+2} - u_{n+1} - u_n$ en posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

20 $A = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -9 & -1 \end{pmatrix}$

1. A est-elle trigonalisable ? Diagonalisable ?
2. Trigonaliser (resp. diagonaliser) A si elle est trigonalisable (resp. diagonalisable).

2. Éléments propres et diagonalisation

21

1. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ a^2 - 7a & a - 7 & a \end{pmatrix}$ admet-elle une valeur propre double ? Pour ces valeurs, A est-elle diagonalisable ?
2. Soit $M = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -10 & -5 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

22 Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A.
2. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer le terme général des suites x, y, z définies par $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} x_{n+1} &= 4x_n - 2(y_n + z_n) \\ y_{n+1} &= x_n - z_n \\ z_{n+1} &= 3x_n - 2y_n - z_n \end{cases}$

23 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A$.
2. Diagonaliser A.
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

24 Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que tout vecteur non nul x soit un vecteur propre. Que dire de u ?

25 Déterminer le commutant et les racines carrées de la matrice $A = \begin{pmatrix} 8 & -10 & 10 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$.

26 Montrer que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si $A^\intercal$ l'est.

27 Déterminer les valeurs propres de la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ 1 & & & (0) \\ & & & \\ 1 & (0) & & 1 \end{pmatrix}$.

28 Quelles sont les matrices élémentaires $E_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisables ?

29 **Densité de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$** Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors pour $\lambda \in \mathbb{K}$ suffisamment proche de 0, $A - \lambda I_n \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$. En déduire que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est limite d'une suite de matrices de $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ au sens où $A^{(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} A$ lorsque pour tout (i,j), $a_{i,j}^{(k)} \to a_{i,j}$.

Retrouver le résultat en exploitant le fait que tout matrice de rang r est équivalente à J_r.

30 On souhaite démontrer que si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

1. Montrer le résultat si on suppose de plus que $A \in \mathscr{GL}(\mathbb{K})$.
2. En déduire le résultat si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ en utilisant l'exercice précédent.
3. Retrouver le résultat dans le cas général en calculant le produit dans les deux sens de $\begin{pmatrix} A & XI_n \\ I_n & (0) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -B & XI_n \\ I_n & -A \end{pmatrix}$.

31 **Matrices circulantes** Soit $n \geqslant 2$.

1. Montrer que la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et la diagonaliser.

2. En déduire la déterminant dit circulant $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & & a_{n-1} \\ a_{n-1} & & & \ddots \\ & & & a_1 \\ a_1 & & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}$.

32 **CCINP 63**

33 **Matrices de rang 1**

1. Montrer que $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est de rang 1 si et seulement si elle peut s'écrire sous la forme $XY^\intercal$ où X, Y sont des colonnes non nulles de taille à déterminer. Comment s'exprime sa trace en fonction de X et Y ?
2. On suppose que $p = q$. Donner, suivant les valeurs de sa trace, les valeurs propres de A. Donner une CNS pour que A soit diagonalisable.

34 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Déterminer, sans calculer son polynôme caractéristique, les valeurs propres de la matrice A.
2. Démontrer, sans déterminer ses sous-espaces propres, que A n'est pas diagonalisable.
3. Justifier que A est trigonalisable, puis trigonaliser A.
4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

35 **Théorème de Gerschgorin** En utilisant le résultat d'inversibilité des matrices à diagonale strictement dominante ($\forall\, i,\ \ |a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$) ou le principe de sa démonstration, montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, chaque valeur propre complexe de A se trouve dans un disque de Gerschgorin de centre $a_{i,i}$ et de rayon $\sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$.

Donner pour chaque valeur propre un disque de centre 0 dans lequel elle se trouve.

36 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $M = \begin{pmatrix} 3B & B \\ -2B & 0 \end{pmatrix}$.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et la diagonaliser.
2. En déduire que M est semblable à la matrice $M' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 2B \end{pmatrix}$.
3. Démontrer que si B est diagonalisable, alors M est diagonalisable.

3. Matrices et endomorphismes nilpotents

37 Quelles sont les matrices nilpotentes diagonalisables ?

38 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$.

1. Montrer que u est un endomorphisme nilpotent et donner son indice de nilpotence.
2. Écrire la matrice A de u dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

39 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que u est nilpotent et déterminer son indice de nilpotence.

40 Montrer que sur $\mathbb{C}$, une matrice est nilpotente si et seulement si 0 est sa seule valeur propre. Est-ce encore vrai sur $\mathbb{R}$?

41 Soit N une matrice carrée d'ordre n nilpotente.

1. Montrer que $I_n - N$ et $I_n + N$ sont inversibles et calculer leurs inverses en fonction de N.
2. En considérant le développement limité de $\sqrt{1+x}$ au voisinage de 0, déterminer une matrice M dont le carré est égal à $I_n + N$.
   (On pourra montrer que si P est un polynôme tel que $P(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$, alors il existe Q tel que $P = X^n Q$ à l'aide d'une division euclidienne.)

42 **Sous-espaces stables par un endomorphisme nilpotent** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fin $n \geqslant 2$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice p.

1. Justifier l'existence d'un vecteur $a \in E$ tel que $u^{p-1}(a) \neq 0$.
2. Démontrer que $\mathscr{F} = \big(a, u(a), \ldots, u^{p-1}(a)\big)$ est une famille libre de E.
3. Retrouver le fait que $p \leqslant n$
4. Dans cette question, on suppose que $p = n$.
   - **4.a)** Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   - **4.b)** Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\dim \operatorname{Ker} u^k = k$.
   - **4.c)** Soit F sous-espace de E stable par u de dimension $k \geqslant 1$. En considérant l'endomorphisme u_F induit par u sur F, montrer que $F = \operatorname{Ker} u^k$.

43 **Commutant d'un endomorphisme nilpotent** Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$, et $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice n.

1. Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $\mathscr{B} = \big(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a)\big)$ est une base de E.

2. Écrire la matrice de u dans la base $\mathscr{B}' = \big(f^{n-1}(a), \dots, f(a), a\big)$.

3. Soit $v \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $u \circ v = v \circ u$ si et seulement si $v \in \big(\mathrm{id}_E, f, \dots, f^{n-1}\big)$.
Indication : on pourra introduire les coordonnées de $g(a)$ dans la base $\mathscr{B}$.

44 Montrer que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente si et seulement si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\operatorname{tr} A^k = 0$.

Ajouter de la trigonalisation !