

## POLYNÔMES, FRACTIONS RATIONNELLES

### 1. Exercices vus en cours

1. Montrer que tout polynôme réel de degré impair possède au moins une racine réelle.
2. CCINP 85 – Caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine
3. CCINP 87 – Interpolation de Lagrange
4. CCINP 90 – Interpolation de Lagrange
5. Soit  $A = X^5 - X^4 + 2X^3 + 1$  et  $B = X^4 - X^3 + 3X^2 - 2X + 2$ .
  1. À l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer  $D = A \wedge B$ .
  2. En déduire  $(U, V) \in \mathbb{R}[X]^2$  tel que  $AU + BV = D$ .
6. Décomposer en produit d'irréductibles les polynômes  $X^n - 1$  dans  $\mathbb{C}[X]$  et  $X^4 + 1$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .
7. Décomposer en éléments simples  $\frac{1}{(X-1)(X+2)}, \frac{1}{X^n-1}, \frac{2X+1}{X^3-2X^2+X}, \frac{X}{(X^2-1)^2}$  dans  $\mathbb{C}(X)$ .
8. Décomposer en éléments simples  $\frac{X^3-1}{X^3+X}$  et  $\frac{2X^2}{(X^2+1)^3}$  dans  $\mathbb{R}(X)$ .
9. Calculer  $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{1}{2-\omega}$ .

### 2. Polynômes

10. Montrer que  $(X-1)^3$  divise  $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ .
11. Soit  $(a, b) \in \mathbb{K}^2$  tel que  $a \neq b$ . Quel est le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X-a)(X-b)$ ? Que devient-il si  $a = b$ ?

### 12. Polynômes de Tchebychev<sup>1</sup>

1. Pour  $n \in \{0, 1, 2\}$ , déterminer un polynôme  $P_n$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(nx) = \tilde{P}_n(\cos x)$ .
2. Démontrer qu'un tel polynôme existe pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et donner une relation de récurrence liant  $P_{n+1}, P_n$  et  $P_{n-1}$ . Déterminer le degré, le coefficient dominant et la parité de  $P_n$ .
3. Quelles sont les racines de  $P_n$ ?

### 13. Polynômes de Legendre<sup>2</sup>

On considère pour  $n \in \mathbb{N}$ , le polynôme  $L_n = \frac{(X^2-1)^n}{2^n n!}$ .

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de  $L_n$ .
2. Soit  $P_n = (X^2-1)^n$ . Montrer que  $(X^2-1)P_n' = 2nXP_n$ . En déduire une relation entre  $L_n, L_n'$  et  $L_n''$ .
3. Montrer que  $L_n$  est scindé à racines simples toutes dans  $] -1, 1[$ .

### 14. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \end{cases}$$

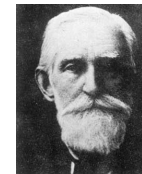
### 15. Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ . Démontrer que si $\frac{p}{q}$ est une fraction

irréductible racine de  $P$  alors  $p$  divise  $a_0$  et  $q$  divise  $a_n$ .

Exemples : déterminer les racines rationnelles de  $6X^4 - 11X^3 - X^2 - 4$ .

### 16. Soit $A = X^3 - 3X + 1$ .

1.  $A$  est-il irréductible dans  $\mathbb{C}[X]$ ? dans  $\mathbb{R}[X]$ ? dans  $\mathbb{Q}[X]$ ?
2.  $A$  est-il scindé sur  $\mathbb{C}$ ? sur  $\mathbb{R}$ ? sur  $\mathbb{Q}$ ?



**Pafnouti Lvovitch Tchebychev** (Russie, 1821 - 1894) est un mathématicien russe. Il est connu pour ses travaux dans le domaine des probabilités et des statistiques. En théorie des nombres, Tchebychev découvre des résultats sur la répartition des nombres premiers. Les polynômes de Tchebychev sont très classiques en classe prépa.



**Adrien Marie Legendre** (Paris 1752 - 1833) Pour les opérations géodésiques organisées par les observatoires de Paris et de Greenwich, il élabore de nombreux résultats de trigonométrie. Ses *Éléments de géométrie* (1794) se sont imposés pendant plus d'un siècle dans l'enseignement secondaire. Dans la *Théorie des nombres* (1798), il énonça la loi de distribution des nombres premiers et formula algébriquement la loi de réciprocité des résidus quadratiques, démontrée par Gauss. Sa classification des intégrales elliptiques en trois espèces distinctes prépare les travaux d'Abel et de Jacobi.

**17**

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les racines d'un polynôme pour qu'il soit scindé à racines simples.
2. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  scindé simple avec  $\deg P \geq 2$ . Montrer que  $P'$  est scindé simple. Comparer les moyennes arithmétiques des racines de  $P$  et de  $P'$ .
3. Est-ce encore vrai sur  $\mathbb{C}[X]$ ?
4. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  scindé avec  $\deg P \geq 2$ . Montrer que  $P'$  est scindé.

**18**

Quel est le reste de la division euclidienne de  $X^{2n+1} + (X+1)^{n+2}$  par  $X^2 + X + 1$ , où  $n \in \mathbb{N}$ ?

**Solution de 18 :**

Les racines de  $X^2 + X + 1$  sont...

Réponse :

$$\begin{array}{r|rrrrrr} n [6] & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline R & 2X & 0 & -2X-2 & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

**19**

Factoriser sur  $\mathbb{R}[X]$  les polynômes  $X^4 + X^2 + 1$  et  $(X^2 - X + 1)^2 + 1$ .

**Solution de 19 :**

Réponses :

- $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$
- $(X^2 - X + 1)^2 + 1 = (X^2 + 1)(X^2 - 2X + 2)$

**20**

Soit, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P_n = \frac{(X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}}{2i}$ .

1. Montrer que  $P_n$  est un polynôme à coefficients réels. Quel est son degré et son coefficient dominant?
2. Déterminer les racines de  $P_n$ . En déduire la décomposition en facteurs irréductibles de  $P_n$  sur  $\mathbb{R}[X]$ .
3. Montrer qu'il existe  $Q_n \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P_n = Q_n(X^2)$ . Quel est le degré et le coefficient dominant de  $Q_n$ ? Trouver les racines de  $Q_n$ .
4. Calculer  $S_n = \sum_{k=1}^n \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1}$  puis  $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}}$ .
5. Montrer que pour  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $\sin x \leq x \leq \tan x$ .
6. En déduire la limite de  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ .

**21**

**Théorème de Bezout<sup>3</sup> avec degrés** Soient  $A$  et  $B$  deux polynômes non constants

premiers entre eux. Montrer qu'il existe un unique couple de polynômes  $(U, V)$  tel que  $AU + BV = 1$  avec  $\deg U < \deg B$  et  $\deg V < \deg A$ .

Indication :  $\deg AU = \deg BV$ . Utiliser le lemme de Gauß.

**22**

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels dont le pgcd est  $d$ . Montrer que le pgcd de  $X^a - 1$  et  $X^b - 1$  est  $X^d - 1$ .

**Solution de 22 :**

**Première méthode** Appliquer l'algorithme d'Euclide à  $a$  et  $b$  (si  $b \neq 0$ ).

$a = bq + r$  avec  $r < b$ .

Donc

$$\begin{aligned} X^a - 1 &= X^{bq+r} - 1 \\ &= (X^b)^q \cdot X^r - 1 \\ &= ((X^b)^q - 1 + 1) \cdot X^r - 1 \\ &= ((X^b)^q - 1) \cdot X^r + X^r - 1 \\ &= (X^b - 1) \cdot P \cdot X^r + X^r - 1 \end{aligned}$$

avec  $\deg X^r - 1 = r < b = \deg X^b - 1$ .

Le reste de la div. euclidienne de  $X^a - 1$  par  $X^b - 1$  est  $X^r - 1$  :

$$X^a - 1 \wedge X^b - 1 = X^b - 1 \wedge X^r - 1$$

Les algorithmes d'Euclide s'écrivent de la même manière pour les entiers et les polynômes.

Dernier reste non nul ?

$$X^a - 1 \wedge X^b - 1 = X^d - 1 \wedge X^0 - 1 = X^d - 1.$$

Si  $b = 0$ ,  $(X^a - 1) \wedge (X^b - 1) = (X^a - 1) \wedge 0 = X^a - 1 = X^d - 1$ .

**Deuxième méthode** Racines complexes

Racines communes de  $X^a - 1$  et  $X^b - 1$ ? But : celles de  $X^d - 1$ .

- Si  $z \in \mathbb{C}$  racine de  $X^d - 1$  ie  $z^d = 1$ , alors  $z^a = 1$  et  $z^b = 1$ . On a  $a', b'$  tels que  $a = da'$  et  $b = db'$ .  
Alors  $z^a = (z^d)^{a'} = 1^{a'} = 1$ . et idem pour  $z^b = 1$ .
- Si  $z$  racine commune,  
on a  $u, v \in \mathbb{Z}$  tels que  $au + bv = d$ .  
 $z^d = z^{au+bv} = (z^a)^u (z^b)^v = 1$ .



3.

**Étienne Bezout** (Nemours 1730 - Avon 1783) Éminent mathématicien, adjoint mécanicien à l'Académie des sciences en mars 1758, il fut nommé en 1763 professeur et examinateur des gardes-marine et composa pour eux un Cours de mathématiques en 4 volumes. Membre de l'Académie de marine, il est l'auteur de nombreux ouvrages dont un Traité de navigation (1769) et une Théorie générale des équations algébriques (1779). Bézout contribua beaucoup à orienter dans un sens mathématique la formation des jeunes officiers pour les rendre aptes aux calculs astronomiques les plus savants. Un tel système, où la théorie l'emportait trop souvent sur la pratique, contrairement à ce qui se faisait en Angleterre, provoqua d'assez vives polémiques.

Or toutes ces racines sont simples (connu) dans  $X^a - 1$  et  $X^b - 1$  donc dans le pgcd et aussi dans  $X^d - 1$  et tous les polynômes sont unitaires (dont LE pgcd) donc  $X^a - 1 \wedge X^b - 1 = X^d - 1$ .

Remarque : la deuxième méthode fonctionne aussi pour montrer

$$(2^a - 1) \wedge (2^b - 1) = (2^d - 1).$$

### 3. Fractions rationnelles

**23** Calculer  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ .

**Solution de 23 :**

Décomposition en éléments simples.

**24** Calculer la dérivée d'ordre  $n$  de  $\frac{1}{X(X^2-1)}$ .

**Solution de 24 :**

$$\left(\frac{1}{X(X^2-1)}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}}{X^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{2(X+1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{2(X-1)^{n+1}}.$$

**25** Décomposer en éléments simples, dans  $\mathbb{C}(X)$ ,  $\frac{X^{n+1}}{X^n - 1}$ .

**Solution de 25 :**

$$\frac{X^{n+1}}{X^n - 1} = X + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k^2}{X - \omega_k}.$$

**26** Soient  $x_i$ , pour  $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ , les quatre racines complexes de  $X^4 - X + 1$ . Calculer les sommes

$$S = \sum_{i=1}^4 \frac{x_i}{x_i^2 - 1} \text{ et } T = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{(x_i - 1)^2}.$$

**Solution de 26 :**

Décomposer en éléments simple puis se ramener à  $\frac{P'}{P}$  pour  $S$ . Pour  $T$ , quelle opération algébrique permet de faire apparaître un carré au dénominateur?

Réponses :

$$S = -\frac{1}{2} \frac{P'}{P}(1) + \frac{1}{2} \frac{P'}{P}(-1) = -\frac{2}{3}.$$

$$T = -\left(\frac{P'}{P}\right)'(1) = -3.$$

**27** Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme scindé à racines simples  $x_1, \dots, x_n$ .

Décomposer en éléments simples  $\frac{P''}{P}$  et en déduire que  $\sum_{k=1}^n \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0$ .

**Solution de 27 :**

$\frac{P''}{P} = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{X - x_k}$  avec  $\lambda_k = \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)}$  donc  $\sum_{k=1}^n \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0$  est le coefficient en  $X^{n-1}$  dans  $P''$  : il est nul.

**28** **Théorème de Gauss<sup>4</sup>-Lucas<sup>5</sup>**

Soit  $P$  un polynôme de degré au moins 2 de  $\mathbb{C}[X]$ . Démontrer que les racines de  $P'$  se trouvent dans l'enveloppe convexe des racines de  $P$  c'est-à-dire sont des barycentres à coefficients positifs de celles-ci, soit encore des combinaisons linéaires à coefficients positifs de somme 1.

On pourra s'intéresser à  $\frac{P'}{P}$ .



5.

**Carl Friedrich Gauss** (Brunswick 1777 - Göttingen 1855) est un mathématicien, astronome et physicien allemand. Surnommé *le prince des mathématiciens*, il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps. Gauss était un génie particulièrement précoce : à 7 ans (ou 10 selon les sources), il donne la formule calculant  $1 + 2 + \dots + 100$ . À 19 ans, il fut le premier à démontrer la loi de réciprocité quadratique. Parmi ses autres prouesses, on peut citer la démonstration du théorème fondamental de l'algèbre, dans sa thèse en 1799, l'invention de la théorie des congruences, la résolution de problèmes de construction à la règle et au compas... Il est considéré comme le fondateur de la géométrie différentielle.



5.

**Edouard Lucas** (1842 - 1891) est un arithméticien français également connu pour ses récréations mathématiques. Il entre à l'École Normale Supérieure puis devient professeur de Spéciales à Paris. Ses travaux mathématiques concernent la géométrie euclidienne non élémentaire, et surtout la théorie des nombres. Sa principale contribution est celle faite aux tests de primalité. Il a en particulier prouvé que le nombre de Mersenne  $2^{127} - 1$  est premier, ce qui reste le plus grand nombre premier découvert sans l'aide d'un ordinateur. Lucas est aussi connu pour être l'inventeur de nombreuses récréations mathématiques. La plus répandue d'entre elles est le problème des tours de Hanoï. Lucas est mort au cours d'un banquet : une assiette portant un couteau est tombée et lui a transpercé la gorge.

**Solution de 28 : Théorème de Gauss<sup>6</sup>-Lucas<sup>7</sup>**

Quantité conjuguée....

$$0 = \sum \lambda_k (z - x_k) \text{ avec } \lambda_k = \frac{1}{|z - x_k|^2}.$$