CONTINUITÉ DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

1. Exercices traités en cours

1 Montrer que la fonction $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \begin{cases} \cos \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$ est discontinue toute en vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires.

2 Montrer qu'un polynôme réel de degré impair admet au moins une racine réelle.

3 Étudier l'uniforme continuité des fonctions $x \mapsto ax + b$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$), $|\cdot|$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

4 Montrer que $\sqrt{\cdot}$ est $\dfrac{1}{2}$-hölderienne : c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^+$, $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant k\sqrt{|x-y|}$.
En déduire l'uniforme continuité de $\sqrt{\cdot}$. Est-elle lipschitzienne ?

2. Continuité

5 Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues en 0 telles que $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ \ f(x+y) = f(x) + f(y)$.

6 Déterminer toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ \ f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(xy) = f(x)f(y)$.

7 Un coureur parcourt 42 km en 4 heures. Montrer qu'il existe un intervalle de 2 heures pendant lequel il parcourt exactement 21 km.

L'exercice suivant permet de généraliser (ou non) ce type de raisonnement.

8 **Théorème de la corde universelle de Paul Lévy**

Soit f continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$.

1. En utilisant $f\left(\dfrac{k}{n}\right)$, montrer que pour tout $n \geqslant 2$, il existe $x_n \in [0,1]$ tel que $f(x_n) = f\left(x_n + \dfrac{1}{n}\right)$.
2. En considérant sur $[0,1]$, la fonction $f : x \mapsto \sin^2\left(\dfrac{\pi x}{T}\right) - x\sin^2\left(\dfrac{\pi}{T}\right)$ où $T > 0$, montrer qu'on peut avoir $f(0) = f(1)$ sans qu'il existe de x tel que $f(x) = f(x+T)$.

9 Soit $[a, b]$ un segment stable par f continue. Montrer que f admet un point fixe dans $[a, b]$.

3. Uniforme continuité

10 Étudier l'uniforme continuité sur $\mathbb{R}_*^+$ de ln et $x \mapsto x \ln x$.

11 Montrer qu'une fonction T-périodique continue sur $\mathbb{R}$ est uniformément continue.

12 Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ |f(x)| \leqslant a\,|x| + b$.

13 Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$ continue telle que f admette une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.