Corrigé Devoir en Temps Limité n° 4 Centrale

SUJET CENTRALE

Problème 1 : Polynômes et diagonalisabilité

1. $P_0=(1+X)^2=1+2X+X^2$, $P_1=(1-X)(1+X)=1-X^2$ et $P_2=(1-X)^2=1-2X+X^2$.

   Donc $A=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P_0,P_1,P_2)=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}$.

   On calcule avec $L_1\leftrightarrow L_3$ puis $L_2\leftarrow L_2-2L_3$ et $L_1\leftarrow L_1+(X-1)L_3$ puis $L_3\leftarrow L_3-L_2$

   $$\chi_A=\begin{vmatrix}X-1&-1&-1\\-2&X&2\\-1&1&X-1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&1&X-1\\-2&X&2\\X-1&-1&-1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&1&X-1\\0&X-2&4-2X\\0&X-2&X^2-2X\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&1&X-1\\0&X-2&4-2X\\0&0&X^2-4\end{vmatrix}=(X-2)^2(X+2)$$

   donc $\boxed{\mathrm{Sp}A=\{-2,2\}.}$

   Puis $A-2I_3=\begin{pmatrix}-1&1&1\\2&-2&-2\\1&-1&-1\end{pmatrix}$ est de rang 1 avec $C_1+C_2=C_1+C_3=0$ donc $E_2(A)$ est de dimension 2 et contient les deux vecteurs linéairement indépendants $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ donc $\boxed{E_2(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right).}$

   Ensuite, $A+2I_3=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&2&-2\\1&-1&3\end{pmatrix}$. On résout le système $(A+2I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ avec les mêmes opérations que le calcul de χ_A ce qui donne donc $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_{-2}(A)\iff\begin{cases}-x+y-3z=0\\-4y+8z=0\\0=0\end{cases}\iff\begin{cases}x=-z\\y=2z\end{cases}$.

   Donc $\boxed{E_{-2}(A)=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}}$ (on savait que c'était une droite car la valeur propre est simple.)

2. Soient $\lambda_0,\dots,\lambda_n$ tel que $\lambda_0P_0+\cdots+\lambda_nP_n=0$ et $i\in[\![0,n]\!]$ fixé. Si l'un des cœfficients n'est pas nul, si i le plus grand indice tel que $\lambda_i\neq0$. Alors $\lambda_iP_i=-\lambda_0P_0-\cdots-\lambda_{i-1}P_{i-1}$ est divisible par $(1+X)^{n+1-i}$ mais ce n'est pas le cas de P_i, donc $\lambda_i=0$ ce qui est contradictoire.

   C'est donc que tous les λ_i sont nuls et $(P_0,\dots,P_n)$ est libre.

   Comme elle est constituée de $n+1=\dim E$ vecteurs de E (les P_i sont tous de degré n), $\boxed{\text{c'est une base de } E.}$

3. (a) Soit $j\in[\![1,n]\!]$.

   On sait que $P_{j-1}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1}a_{ij}X^{i-1}$, on va tâcher de s'y ramener (en passant par les fractions rationnelles, ce qui n'est pas un problème).

   $$\sum_{i=1}^{n+1}a_{ij}P_{i-1}=\sum_{i=1}^{n+1}a_{ij}(1-X)^{i-1}(1+X)^{n+1-i}=(1+X)^n\sum_{i=1}^{n+1}a_{ij}\left(\frac{1-X}{1+X}\right)^{i-1}=(1+X)^nP_{j-1}\left(\frac{1-X}{1+X}\right)$$
   $$=(1+X)^n\left(1-\frac{1-X}{1+X}\right)^{j-1}\left(1+\frac{1-X}{1+X}\right)^{n-j+1}=(1+X)^n\left(\frac{2X}{1+X}\right)^{j-1}\left(\frac{2}{1+X}\right)^{n-j+1}=2^nX^{j-1}$$

Donc $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij}\, P_{i-1} = 2^n X^{j-1}.}$

Cette question était délicate : on aurait pu conjecturer le résultat pour des petites valeurs de n et le montrer par récurrence (plutôt pénible) ou conjecturer directement la valeur de A^2 à partir des petites valeurs de n pour la suite.

(b) On calcule par ailleurs $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij}\, P_{i-1} = \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} a_{ij} a_{k,i} X^{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_{k,i} a_{ij}\right) X^{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1} \left[A^2\right]_{k,j} X^{k-1}.$

Vu la question précédente et par unicité des cœfficients d'un polynôme, $\boxed{A^2 = 2^n I_{n+1}.}$

Autre rédaction possible : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij}\, P_{i-1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_{ij} u\left(X^{i-1}\right) = u\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij} X^{i-1}\right) = u\left(P_{j-1}\right) = u^2\left(X^{j-1}\right) = 2^n X^{j-1}$ donc

$u^2 = 2^n\,\mathrm{id}_E$ et $\boxed{A^2 = 2^n I_{n+1}.}$

Donc $X^2 - 2^n$ annule A et comme A n'est pas une matrice scalaire, $\boxed{X^2 - 2^n \text{ est le polynôme minimal de } A.}$

Comme il est scindé à racines simples, $\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$

(c) On a alors $(\det A)^2 = \det A^2 = (2^n)^{n+1}$ donc $\boxed{\left|\det(A)\right| = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}.}$

4. (a) $\mathscr{B}_1$ continent $2m+2 = n+1 = \dim E$ vecteurs de E, montrons qu'elle est libre.
Cela revient à montrer que $\mathbb{R}_m[X]$ et $\mathrm{Vect}(P_0, \dots, P_m)$ sont en somme directe.
Or si on a $P \in \mathbb{R}_m[X] \cap \mathrm{Vect}(P_0, \dots, P_m)$, P est de degré au plus m et est divisible par $(1+X)^{n-m}$ donc admet -1 comme racine d'ordre au plus $n - m = \dfrac{n+1}{2} > \dfrac{n-1}{2} = m$: il s'agit donc du polynôme nul.
$\mathbb{R}_m[X]$ et $\mathrm{Vect}(P_0, \dots, P_m)$ sont en somme directe et $(1, X, \dots, X^m)$ et $(P_0, \dots, P_m)$ sont des familles libres de chacun de ces sous-espaces (en utilisant 2.) donc leur concaténation l'est encore.

Donc $\boxed{\mathscr{B}_1 \text{ est une base de } E.}$

(b) On a par définition, pour tout $j \in [\![0, m]\!]$, $u\left(X^j\right) = P_j$ et comme $u^2 = 2^{n-1}\,\mathrm{id}_E$, $u(P_j) = u^2\left(X^j\right) = 2^n X^j$.

Donc $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(u) = \begin{pmatrix} 0_{m+1} & 2^n I_{m+1} \\ I_{m+1} & 0_{m+1} \end{pmatrix}}$ donc $\boxed{\mathrm{tr} A = \mathrm{tr}\, u = 0.}$ Puis, en échangeant deux à deux les $m+1$ premières colonnes avec les $m+1$ dernières, $\det A = \begin{vmatrix} 2^n I_{m+1} & 0_{m+1} \\ 0_{m+1} & I_{m+1} \end{vmatrix} = (-1)^{m+1} 2^{n(m+1)}$, donc $\boxed{\det A = (-1)^{\frac{n+1}{2}} 2^{\frac{n(n+1)}{2}}}$

ce qui est cohérent avec 3.

(c) Si λ est valeur propre de A, on a $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$, puis $A^2 X = \lambda AX = \lambda^2 X$. Mais avec 3.b, $A^2 X = 2^n X$. Comme $X \neq 0$, $\lambda^2 = 2^n$ et $\mathrm{Sp} A \subset \{-2^{n/2}, 2^{n/2}\}$.
Comme A est diagonalisable et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(u)$ n'est pas scalaire, ou quitte à se placer dans $\mathbb{C}$, χ_A est scindé et vu que

$\mathrm{tr} A = 0$, on en déduit que $\boxed{\mathrm{Sp} A = \{-2^{n/2}, 2^{n/2}\}.}$

5. (a) Démonstration similaire à 4.a.

(b) Comme en 4.b, sauf qu'il faut détailler $u(P_m) = 2^n X^m$: calcul difficile !
L'idée est de reconnaître dans P_i, un semblant de Binôme de Newton.
Mais ce sont $P_0, \dots, P_m$ qui nous intéressent.
On calcule $\displaystyle\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} P_i = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (1-X)^i (1+X)^{2m-i} = (1+X)^m \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (1-X)^i (1+X)^{m-i} = 2^m (1+X)^m.$

Et en réutilisant le binôme, $\displaystyle\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}P_i = 2^m\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}X^i$ d'où $u(P_m) = 2^{2m}X^m = -\displaystyle\sum_{i=0}^{m-1}2^n\binom{m}{i}X^i + \sum_{i=0}^{m}2^m\binom{m}{i}P_i$.

$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(u) = \begin{pmatrix} 0_m & 2^n I_m & -2^n C \\ I_m & 0_m & 2^m C \\ 0_{1,m} & 0_{1,m} & 2^m \end{pmatrix} \text{ avec } C = \begin{pmatrix} \binom{m}{0} \\ \binom{m}{1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \binom{m}{m-1} \end{pmatrix}}$ donc $\boxed{\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}\,u = 2^{\frac{n}{2}}}$ (cohérent avec 1) et, en échangeant 2 à 2 les m premières colonnes et les m suivantes, $\boxed{\det A = \det u = (-1)^m 2^{nm+m} = (-1)^{\frac{n}{2}} 2^{\frac{n(n+1)}{2}}}$ (cohérent avec 3.)

(c) On en déduit $\boxed{\mathrm{Sp}A = \{-2^{n/2}, 2^{n/2}\}}$ comme en 4.c ($\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(u)$ n'est pas scalaire).

Problème 2 : Caractérisation des comatrices

1. Regarde les n^2 équations polynomiales qui définissent les cœfficients de $\varphi(t) = \displaystyle\sum_{i=0}^{r} t^i A_i$: chacune a plus de r racines en étant de degré au plus r, donc $\boxed{\text{chacun des cœfficients de chacune des matrices } A_i \text{ est nul.}}$

2. (a) Chacun des cœfficients de $\mathrm{Com}(A - tI_n)$ est un cofacteur, donc plus ou moins un mineur qui est un déterminant de taille $n-1$ de type polynôme caractéristique dans lequel t apparaît au plus une fois dans chaque ligne et colonne.
La formule du déterminant ($\det M = \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{n-1}} \varepsilon(\sigma) m_{\sigma(1),1} \dots m_{\sigma(n-1),n-1}$) donne une combinaison linéaire de termes polynomiaux de degré au plus $n-1$, donc chaque cœfficient de $\mathrm{Com}(A - tI_n)$ est un terme polynomial de degré au plus $n-1$ en t.

$\boxed{\text{On a donc bien des matrices } R_0, \dots, R_{n-1} \text{ telles que, pour tout } t \in \mathbb{C},\ [\mathrm{Com}(A - tI_n)]^\intercal = \sum_{i=0}^{n-1} t^i R_i.}$

L'unicité provient de la première question car si $R_0, \dots, R_{n-1}$ d'une part et $S_0, \dots, S_{n-1}$ d'autre part conviennent, alors pour tout $t \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} t^i (R_i - S_i) = 0$ et donc pour tout i, $R_i = S_i$.

(b) Comme 0 est racine de $\chi_A(0) - \chi_A$, X divise $\chi_A(0) - \chi_A$ et le polynôme P est bien défini.
On a $XP = (-1)^n(\chi_A(0) - \chi_A)$ donc, en évaluant en $A^\intercal$, $A^\intercal P(A^\intercal) = (-1)^n(\chi_A(0)I_n - \chi_A(A^\intercal))$.
Or A et $A^\intercal$ on même polynôme caractéristique car le déterminant est invariant par transposition.
Donc $\chi_A(A^\intercal) = \chi_{A^\intercal}(A^\intercal) = 0_n$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton. Ainsi,

$$A^\intercal P(A^\intercal) = (-1)^n \chi_A(0) I_n = (-1)^n \det(-A) I_n = (\det A) I_n.$$

On fait une disjonction de cas selon l'inversibilité de A (donc de $A^\intercal$) :

- Si A est inversible, $A^\intercal$ l'est et on a alors

$$P(A^\intercal) = (\det A)(A^\intercal)^{-1} = \left((\det A)A^{-1}\right)^\intercal = \mathrm{Com}A$$

  d'après la formule de la comatrice.
- Le cas où A n'est pas inversible est vraiment difficile et demande d'utiliser les questions précédentes.
  On peut toujours écrire $A^\intercal P_A(A^\intercal) = (\det A) I_n$ quelle que soit la matrice A, où on note plutôt $P = P_A$.
  $A - tI_n$ est inversible pour tout t qui ne soit pas valeur propre de A qui n'en possède qu'un nombre fini.

En appliquant le cas précédent, on obtient, pour $t \notin \operatorname{Sp} A$, $P_{A-tI_n}\left((A-tI_n)^\intercal\right) = \operatorname{Com}(A-tI_n)$. En transposant, on obtient $P_{A-tI_n}((A-tI_n)) = [\operatorname{Com}(A-tI_n)]^\intercal$ (par linéarité de la transposée et $BC^\intercal = C^\intercal B^\intercal$, on a bien pour tout polynôme Q et matrice carrée B, $Q(B) = Q(B^\intercal)$.)

Donc, d'après la question précédente, on a des matrices $R_0, \ldots, R_{n-1}$ telles que $P_{A-tI_n}(A-tI_n) = \sum_{i=0}^{n-1} t^i R_i$. (1)

Écrivons $\chi_{A-tI_n} = \det(XI_n - (A-tI_n)) = \chi_A(X+t)$, donc $P_{A-tI_n} = (-1)^n \dfrac{\chi_A(t) - \chi_A(X+t)}{X}$.

On peut poser $\chi_A = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$. Alors $P_{A-tI_n} = (-1)^n \sum_{i=1}^{n} a_i \dfrac{t^i - (X+t)^i}{X} = (-1)^{n+1} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1} a_i t^j (X+t)^{i-1-j}$ et $P_{A-tI_n}(A-tI_n) = (-1)^{n+1} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1} a_i t^j A^{i-1-j} = \sum_{j=0}^{n-1} \left((-1)^{n+1} \sum_{i=j+1}^{n} a_i A^{i-1-j} \right) t^j$. (2)

Par (1) et (2) et par la question 1, $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp} A$ étant infini, $\operatorname{Com} A^\intercal = R_0 = (-1)^{n+1} \sum_{i=1}^{n} a_i A^{i-1} = P_A(A)$ donc en transposant, $\boxed{\operatorname{Com} A = P(A^\intercal).}$

---

3. (a) Si A est de rang n, elle est inversible et, avec la formule de la comatrice, $\operatorname{Com} A$ l'est aussi donc $\boxed{\operatorname{Com} A \text{ est de rang } n.}$

   De plus, $\operatorname{Com} A = (\det A)\left(A^{-1}\right)^\intercal = (\det A)(A^\intercal)^{-1}$ et comme $\operatorname{Com} A$ est inversible, on a aussi

   $$\operatorname{Com}(\operatorname{Com} A) = (\det(\operatorname{Com} A))((\operatorname{Com} A)^\intercal)^{-1} = \frac{\det(\operatorname{Com} A)}{\det A} A.$$

   Or, en prenant le déterminant de la formule de la comatrice, on obtient $\det A \det(\operatorname{Com} A) = \det((\det A) I_n) = (\det A)^n$ donc $\det(\operatorname{Com} A) = (\det A)^{n-1}$ (avec $\det A \neq 0$).

   Finalement, $\boxed{\operatorname{Com}(\operatorname{Com} A) = (\det A)^{n-2} A.}$

   (b) Si A est de rang $n-1$ et si $L_1, \ldots, L_n$ sont les lignes de A, $(\operatorname{Com} A) \times L_i$ n'a pas de sens, nous allons plutôt calculer $(\operatorname{Com} A) \times L_i^\intercal$.
   Comme $(\operatorname{Com} A) \times A^\intercal = (\det A) I_n = 0_n$, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $L_i^\intercal$ est la ie colonne de $A^\intercal$ et donc $\boxed{(\operatorname{Com} A) \times L_i^\intercal \text{ est la } i^{\text{e}} \text{ colonne de } 0_n \text{ soit la colonne nulle.}}$

   Ainsi, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $L_i^\intercal \in \operatorname{Ker}(\operatorname{Com} A)$. Comme $A^\intercal$ est de rang $n-1$, la famille de ses colonnes l'est aussi, donc $\dim(\operatorname{Ker}(\operatorname{Com} A)) \geqslant n-1$ et comme $\operatorname{Com} A$ n'est pas nulle, car au moins un des mineurs de A est non nul vu que $\operatorname{rg} A = n-1$, on a $\dim(\operatorname{Ker}(\operatorname{Com} A)) = n-1$, puis, par théorème du rang, $\boxed{\operatorname{rg}(\operatorname{Com} A) = 1.}$

   (c) Si $\operatorname{rg} A \leqslant n-2$, alors tous ses mineurs sont nuls donc $\boxed{\operatorname{Com} A = 0_n.}$

---

4. (a) On suppose M et N sont inversibles, donc MN l'est.
   Alors $\operatorname{Com}(MN) = \det(MN)\left((MN)^{-1}\right)^\intercal = \det(M)\det(N)\left(N^{-1}M^{-1}\right)^\intercal = \det(M)\det(N)\left(M^{-1}\right)^\intercal \left(M^{-1}\right)^\intercal$ donc $\boxed{\operatorname{Com}(MN) = \operatorname{Com} M \operatorname{Com} N.}$

   (b) La question revient à montrer que si $|t|$ est assez petit, alors $M(t) = M - tI_n$ et $N(t) = N - tI_n$ sont inversibles, donc $t \notin \operatorname{Sp} M \cap \operatorname{Sp} N$. Or M et N ne possèdent qu'un nombre fini de valeurs propres non nulles. Il suffit de prendre $|t|$ plus petit que $\min(\alpha, \beta)$ où $\alpha = \min\limits_{\lambda \in \operatorname{Sp}(M)\setminus\{0\}} |\lambda|$ si $\operatorname{Sp}(M) \neq \{0\}$ et 1 (par exemple) sinon, et $\beta = \min\limits_{\lambda \in \operatorname{Sp}(N)\setminus\{0\}} |\lambda|$ si $\operatorname{Sp}(N) \neq \{0\}$ et 1 sinon.

   Alors $M(t)$ et $N(t)$ sont inversibles et la question précédente donne $\boxed{\operatorname{Com}\big(M(t)N(t)\big) = \operatorname{Com}\big(M(t)\big) \operatorname{Com}\big(N(t)\big).}$

(c) Les cœfficients de la comatrice sont des cofacteurs qui sont eux-mêmes des combinaisons linéaires de produits de cœfficients de la matrices.
Donc lorsque $t \to 0$, $\operatorname{Com}\big(M(t)\big) \to \operatorname{Com} M$, $\operatorname{Com}\big(N(t)\big) \to \operatorname{Com} N$ et $\operatorname{Com}\big(M(t)N(t)\big) \to \operatorname{Com}\big(MN\big)$ en regardant cœfficients à cœfficients.
Ensuite, le produit matriciel donnant des somme de produit, on va bien avoir, toujours cœfficients à cœfficients, $\operatorname{Com}\big(M(t)\big)\operatorname{Com}\big(N(t)\big) \to \operatorname{Com} M \operatorname{Com} N$.

Finalement, par unicité de la limite, en utilisant la question précédente, $\boxed{\operatorname{Com}(MN) = \operatorname{Com} M \operatorname{Com} N.}$

Autre rédaction possible : utiliser 2.a pour voir l'égalité de la question précédente comme une écriture $\displaystyle\sum_{i=0}^{2n-2} t^i R_i = \sum_{i=0}^{2n-2} t^i S_i$ pour une infinité de t, et déduire de la première question que l'égalité est aussi vraie pour $t = 0$, ce qui permet de conclure.

(d) Si M est une matrice de projection, $M^2 = M$ et avec la question précédente, $\operatorname{Com} M = \operatorname{Com}\big(M^2\big) = (\operatorname{Com} M)^2$ donc $\boxed{\operatorname{Com} M \text{ est aussi une matrice de projection.}}$

5. (a) Soit p projection canoniquement associée à A. Dans une base adaptée à $\mathbb{C}^n = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}) \oplus \operatorname{Ker} p$, la matrice de p est $B = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & 0 \end{pmatrix}$ qui est donc semblable à A.

Alors $\boxed{\chi_A = \chi_B = X(X-1)^{n-1}.}$

(b) On utilise 2.b : $\operatorname{Com} A = P\,(A^\intercal)$. Or ici $\chi_A(0) - \chi_A(X) = -\chi_A(X)$ donc $P = (-1)^{n-1}(X-1)^{n-1} = (1-X)^{n-1}$.
On a donc, $\operatorname{Com} A = (I_n - A^\intercal)^{n-1}$. Mais $A^\intercal$ est aussi une matrice de projection car idempotente, et $I_n - A^\intercal$ qui représente la projection associée est aussi une matrice de projection donc $\boxed{\operatorname{Com} A = I_n - A^\intercal.}$

(c) Si M est une matrice de projection de rang 1 dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, soit $A = I_n - M^\intercal$. Alors $A^2 = I_n - 2M^\intercal + (M^\intercal)^2$ car I_n et $M^\intercal$ commutent.
Donc $A^2 = I_n - 2M^\intercal + \big(M^2\big)^\intercal = I_n - 2M^\intercal + M^\intercal = I_n - M^\intercal = A$ car M est une matrice de projection.
Ainsi, A est une matrice de projection. Reste à voir que son rang est $n-1$. Or

$$\operatorname{rg} A = \dim(\operatorname{Im} A) = \dim(\operatorname{Im}(I_n - M^\intercal)) = n - \dim(\operatorname{Ker}(I_n - M^\intercal)) = n - \dim(\operatorname{Im} M^\intercal) = n - \operatorname{rg} M^\intercal = n - \operatorname{rg} M = n-1$$

car $M^\intercal$ est aussi une matrice de projection.

Ainsi, avec la question précédente, $\boxed{\operatorname{Com} A = M \text{ qui est une comatrice.}}$

6. (a) M est de rang 1 donc 0 valeur propre et $\dim E_0(M) = \dim \operatorname{Ker} M = n-1$.

Donc on a $a \in \mathbb{C}^*$ tel que M est semblable à $\operatorname{diag}(a, 0, \dots, 0)$ et donc $\boxed{a^{-1}M \text{ est une matrice de projection.}}$

(b) Avec 5.c, on a A telle que $a^{-1}M = \operatorname{Com} A$, donc $M = a \operatorname{Com} A$. Soit $b \in C$ une racine $n-1^{\text{e}}$ de a (il en existe toujours, $n-1 \geqslant 2$), alors $\boxed{M = \operatorname{Com}(bA)}$ par $n-1$-linéarité des mineurs de bA.

7. (a) A est de rang 1 donc 0 est valeur propre et le sous-espace propre associé est de dimension $n-1$. Comme A n'est pas diagonalisable, il n'y a pas d'autre valeur propre.
Soit u endomorphisme canoniquement associé à A, F un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$.

Dans une base adaptée à $\operatorname{Ker} u \oplus F = \mathbb{C}^n$, la matrice de u est de la forme $B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$. Mais comme 0 est la seule valeur propre, $a_n = 0$ et on a alors $B^2 = 0$, donc $u^2 = 0$ et $\boxed{A^2 = 0.}$

Comme $u^2=0$, $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$. Soit $e_1 \neq 0$ un vecteur directeur de la droite $\operatorname{Im} u$. alors (e_1) est une famille libre de $\operatorname{Ker} u$ qu'on complète en $(e_1,\dots,e_{n-1})$ base de $\operatorname{Ker} u$. Comme $e_1 \in \operatorname{Im} u$ donc on a $e_n \in \mathbb{C}^n$ tel que $u(e_n)=e_1$.
On vérifie que $\operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Vect}(e_n)=\mathbb{C}^n$: on a bien $\dim \operatorname{Ker} u + 1 = n$ et si $x \in \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Vect}(e_n)$, on a $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $x=\lambda e_n \in \operatorname{Ker} u$ et $u(x)=0=\lambda u(e_n)=\lambda e_1$ avec $e_1\neq 0$ donc $\lambda=0$ puis $x=0$ donc la somme est bien directe.
Finalement, $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de $\mathbb{C}^n$ et par construction, la matrice de u dans cette base est $\boxed{A_1=\begin{pmatrix}0&\dots&0&1\\0&\dots&0&0\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&\dots&0&0\end{pmatrix}\text{, semblable à } A.}$

(b) L'endomorphisme canoniquement associé à $D_1=\begin{pmatrix}0&&&-1\\&1&&(0)\\&&\ddots&\\&(0)&1&\\&&&0\end{pmatrix}$ est $v:(x_1,\dots,x_n)\mapsto(-x_n,x_2,\dots,x_{n-1},0)$.

Alors $v^2:(x_1,\dots,x_n)\mapsto(0,x_2,\dots,x_{n-1},0)$ donc $v^2-v:(x_1,\dots,x_n)\mapsto(x_n,0,\dots,0)$ donc $\boxed{D_1^2-D_1=A_1.}$

Puis $v\circ(v^2-v)=v^3-v^2=v^2-v^2=0$ donc $\boxed{D_1A_1=0_n}$ et comme A_1 est un polynôme en D_1, elle commute avec D_1 : $\boxed{A_1D_1=0_n.}$

Enfin, dans D_1, les colonnes 2 à n sont libres (colonnes de la base canonique au signe près) et la première colonne est nulle donc $\boxed{\operatorname{rg} D_1=n-1.}$

(c) Soit $P\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A=PA_1P^{-1}$. On pose $D=PD_1P^{-1}$.

Alors, vu les résultats de la question précédente, $\boxed{D^2-D=A \text{ et } AD=DA=0.}$

Puis $\boxed{\operatorname{rg}(I_n-D)}=\operatorname{rg}(I_n-D_1)=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&0&\dots&0&1\\0&0&\dots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\dots&0&1\end{pmatrix}\boxed{=2.}$

Puis, comme dans la question précédente $v^2=v^3$, $D_1^2=D_1^3$ et $\boxed{D^2=D^3.}$

(d) On a $\chi_D=\chi_{D_1}=\begin{vmatrix}X&&&1\\&X-1&(0)&\\&(0)&X-1&\\&&&X\end{vmatrix}$ donc $\boxed{\chi_D=X^2(X-1)^{n-2}}$.

Puis avec la question 2.b, $P=(-1)^{n+1}X(X-1)^{n-2}=-X(1-X)^{n-2}$ et $\operatorname{Com} D=-D^\intercal\,(I_n-D^\intercal)^{n-2}$.
Mais avec la question précédente, pour tout $k\geqslant 2$, $D^k=D^2$ donc $(D^\intercal)^k=(D^\intercal)^2$ et comme I_n et $D^\intercal$ commutent, par la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}\operatorname{Com} D&=-\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(-1)^k\,(D^\intercal)^{k+1}=-D^\intercal-\sum_{k=1}^{n-2}\binom{n-2}{k}(-1)^k\,(D^\intercal)^2\\&=-D^\intercal-\big((1-1)^{n-2}-1\big)\,(D^\intercal)^2\end{aligned}$$

et comme $n-2>0$, $\boxed{\operatorname{Com} D=-D^\intercal+(D^\intercal)^2=A^\intercal.}$

(e) Avec les deux questions précédentes, $\boxed{A = (\operatorname{Com} D)^{\intercal} = \operatorname{Com}(D^{\intercal}),}$ cette dernière égalité découlant de la définition de la comatrice.

8. D'après 3, les comatrices sont soit inversibles, soit de rang 1, soit nulles.
Réciproquement,
   - Si A est inversible, $A = \dfrac{1}{(\det A)^{n-2}} \operatorname{Com}(\operatorname{Com} A) = \operatorname{Com}(\alpha \operatorname{Com} A)$ où α est une racine $(n-1)^{\text{e}}$ de $\dfrac{1}{(\det A)^{n-2}}$ donc A est une comatrice.
   - Si A est de rang 1, qu'elle soit ou non diagonalisable, c'est une comatrice d'après les questions 6 et 7.
   - Si A est nulle, alors $A = \operatorname{Com} 0_n$.

   $\boxed{\text{Finalement, les comatrices sont exactement les matrices de rang } 0, 1 \text{ ou } n.}$

Fin