CORRIGÉ DEVOIR EN TEMPS LIMITÉ N° 4 CCINP

SUJET CCINP

Problème 1 : Résultant de deux polynômes : CCP MP Maths 2 2009

Définition et propriétés

1. **Cas où u est bijective**

   (a) Si $(A,B),(C,D)\in E$ et $\lambda\in E$, alors $u(A+\lambda C,B+\lambda D)=u(A,B)+\lambda u(C,D)$ par distributivité du produit polynomial.

   Donc $\boxed{u\in\mathscr{L}(E,F).}$

   (b) Puisque u est supposée bijective, 1 a un antécédent par u et le théorème de Bézout dit que $\boxed{P\wedge Q=1.}$

   (c) Si réciproquement $P\wedge Q=1$, et si $(A,B)\in\operatorname{Ker}u$, alors $PA=-QB$ donc $P|QB$ et par lemme de Gauß avec $P\wedge Q=1$, $P|B$. Comme $\deg P=p>\deg B$, on en déduit que $B=0$ puis $PA=0$ et enfin $A=0$ car $P\neq 0$.

   Donc, $\boxed{\operatorname{Ker}u=\{(0,0)\}}$ et comme $\dim E=q+p=\dim F$, $\boxed{u \text{ est un isomorphisme.}}$

2. **Matrice de u**

   (a) On remarque que $\boxed{\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u)=M_{P,Q}}$ car pour tout $j\in[\![0,q-1]\!]$, $u\left(\left(X^j,0\right)\right)=X^jP=\displaystyle\sum_{k=0}^{p}a_kX^{k+j}$ et pour tout $j\in[\![0,p-1]\!]$, $u\left(\left(0,X^j\right)\right)=X^jQ=\displaystyle\sum_{k=0}^{q}b_kX^{k+j}$.

   (b) $\operatorname{Res}(P,Q)\neq 0$ si et seulement si $M_{P,Q}=\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u)$ inversible si et seulement si u bijectif vu la question précédente.

   Donc, vu la question 1, $\boxed{\operatorname{Res}(P,Q)\neq 0 \text{ si et seulement si } P \text{ et } Q \text{ sont premiers entre eux.}}$

3. **Racine multiple**

   (a) P admet une racine multiple si et seulement si P et P' ont une racine en commun si et seulement s'il existe $a\in\mathbb{C}$ tel que $X-a$ soit un diviseur commun de P et P' si et seulement si $P\wedge P'$ n'est pas constant d'après le théorème de d'Alembert-Gauß. Finalement,

   $\boxed{P \text{ admet une racine multiple si et seulement si } P \text{ et } P' \text{ ne sont pas premiers entre eux si et seulement si } \operatorname{Res}(P,P')=0}$

   d'après la question précédente.

   (b) Ainsi, avec $P=X^3+aX+b$, $P'=3X^2+a$. Donc

$$\operatorname{Res}(P,P')=\begin{vmatrix} b&0&a&0&0\\ a&b&0&a&0\\ 0&a&3&0&a\\ 1&0&0&3&0\\ 0&1&0&0&3\end{vmatrix} \underset{C_5\leftarrow C_5-3C_2}{=} \begin{vmatrix} b&0&a&0&0\\ a&b&0&a&-3b\\ 0&a&3&0&-2a\\ 1&0&0&3&0\\ 0&1&0&0&0\end{vmatrix} \underset{\text{dev \% } L_5}{=} -\begin{vmatrix} b&a&0&0\\ a&0&a&-3b\\ 0&3&0&-2a\\ 1&0&3&0\end{vmatrix}$$

$$\underset{C_3\leftarrow C_3-3C_1}{=} -\begin{vmatrix} b&a&-3b&0\\ a&0&-2a&-3b\\ 0&3&0&-2a\\ 1&0&0&0\end{vmatrix} \underset{\text{dev \% } L_4}{=} \begin{vmatrix} a&-3b&0\\ 0&-2a&-3b\\ 3&0&-2a\end{vmatrix} \underset{\text{dev \% } L_1}{=} 4a^3+27b^2.$$

   Donc $\boxed{\text{le polynôme } X^3+aX+b \text{ admet une racine multiple si et seulement si } 4a^3+27b^2=0.}$

Applications

4. **Équation de Bézout**

(a) On calcule avec l'algorithme du pivot de Gauß

$$\mathrm{Res}(P,Q)=\begin{vmatrix}1&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&-1&1&0&0\\0&0&1&0&-1&1&0\\1&0&0&1&0&-1&1\\1&1&0&0&1&0&-1\\0&1&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&1\end{vmatrix}\underset{L_i\leftarrow L_i-L_1,\ i\in\{4,5\}}{=}\begin{vmatrix}1&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&-1&1&0&0\\0&0&1&0&-1&1&0\\0&0&0&0&0&-1&1\\0&1&0&-1&1&0&-1\\0&1&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&1\end{vmatrix}$$

$$\underset{L_i\leftarrow L_i-L_2,\ i\in\{5,6\}}{=}\begin{vmatrix}1&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&-1&1&0&0\\0&0&1&0&-1&1&0\\0&0&0&0&0&-1&1\\0&0&0&0&0&0&-1\\0&0&1&1&-1&1&0\\0&0&1&0&0&0&1\end{vmatrix}\underset{L_i\leftarrow L_i-L_3,\ i\in\{6,7\}}{=}\begin{vmatrix}1&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&-1&1&0&0\\0&0&1&0&-1&1&0\\0&0&0&0&0&-1&1\\0&0&0&0&0&0&-1\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&-1&1\end{vmatrix}$$

$$\underset{L_4\leftrightarrow L_6,\ L_5\leftrightarrow L_7}{=}\begin{vmatrix}1&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&-1&1&0&0\\0&0&1&0&-1&1&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0&-1&1\\0&0&0&0&0&0&-1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

donc $\boxed{P \text{ et } Q \text{ sont premiers entre eux}}$ d'après 2. (et l'algorithme d'Euclide aurait été plus rentable !)

(b) En notant $A_0=a+bX+cX^2$ et $B=d+eX+fX^2+gX^3$, $u(A_0,B_0)=1 \iff M_{P,Q}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\\f\\g\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

En reprenant le pivot de Gauß de la question précédente, et en faisant subir les mêmes opérations au second membre qui devient successivement $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$, puis $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}$, il vient

$$u(A_0,B_0)=1\iff\begin{cases}a+d=1\\b-d+e=0\\c-e+f=0\\d=0\\e-f+g=0\\-f+g=-1\\-g=-1\end{cases}\iff\begin{cases}a=1\\b=-1\\c=-1\\d=0\\e=1\\f=2\\g=1\end{cases}$$

Donc $\boxed{(A_0,B_0)=(1-X-X^2,X+2X^2+X^3) \text{ est solution}}$ (et l'algorithme d'Euclide étendu aurait été plus rentable !)

(c) Si on a $PA+QB=1=PA_0+QB_0$, alors $P(A-A_0)=Q(B_0-B)$ avec $P\wedge Q=1$ d'après (a) donc par lemme de Gauß, P divise B_0-B donc on a $C\in\mathbb{C}[X]$ tel que $B=B_0-PC$ et en réinjectant, $P(A-A_0)=PQC$ avec $P\neq 0$ donc $A=A_0+QC$.
Réciproquement, $P(A_0+QC)+Q(B_0-PC)=PA_0+QB_0=1$.

Donc $\boxed{\text{les solutions sont exactement les couples } (A_0+QC, B_0-PC) \text{ pour } C \in \mathbb{C}[X].}$

5. **Nombre algébrique** On remarque que pour $y=\sqrt{3}+\sqrt{7}$, $\sqrt{3}$ est racine commune de P et Q_y, donc le résultant de ces deux polynômes est nul.

   Or le calcul donne $\operatorname{Res}(P, Q_\lambda) = y^4-20y^2+16$. Donc $\boxed{X^4-20X^2+16 \text{ admet } \sqrt{3}+\sqrt{7} \text{ comme racine.}}$

   De nouveau, il y a plus simple car $y^2=\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2 = 10+2\sqrt{21}$ donc $\left(y^2-10\right)^2=84$ ce qui redonne $y^4-20y^2+16=0$.
   Les racines de ce polynômes correspondent aux y tels que P et Q_y ont une racine en commun (donc ne sont pas premiers entre eux, vu 2.)
   Or les racines de P sont $\pm\sqrt{3}$ et celle de Q_λ sont $y\pm\sqrt{7}$.

   Donc $\boxed{\text{les quatre racines de } X^4-20X^2+16 \text{ sont } s\sqrt{3}+t\sqrt{7} \text{ où } s,t\in\{-1,1\}.}$

Problème 2 : Pour tout $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \det\left(I_n+C\overline{C}\right) \in \mathbb{R}^+$: CCINP PSI 2021

I. Deux cas particuliers

1. Soient $c_1,\ldots,c_n$ les cœfficients diagonaux de C, alors $\boxed{\det(I_n+C\overline{C}) = \prod_{i=1}^n \left(1+|c_i|^2\right) \text{ est un réel, est supérieur à } 1}$

   et $\boxed{\text{est égal à } 1}$ si et seulement si pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $1+|c_i|^2=1$ (si l'un deux était >1, le produit le serait aussi)

   si et seulement si tous les c_i sont nuls $\boxed{\text{si et seulement si } C=0.}$

2. On écrit $C=PDP^{-1}$ avec $P\in\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale.
   Alors $\det\left(I_n+C^2\right) = \det\left(P\left(I_n+D^2\right)P^{-1}\right) = \det\left(I_n+D^2\right) = \det\left(I_n+D\overline{D}\right)$ car D réelle.

   La question précédente s'applique : $\boxed{\det\left(I_n+C^2\right) \geqslant 1 \text{ avec égalité si et seulement si } D=0 \text{ si et seulement si } C=0.}$

3. La récurrence est inutile ici : il suffit d'appliquer le morphisme de conjugaison à la définition du déterminant

   $$\det A = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n}.$$

   Mais puisque le sujet le demande, on vérifie que c'est le cas en dimension 1 ($\det((a))=a$) et si on se donne $n\geqslant 1$ tel que c'est vrai pour des déterminants de taille n, il suffit de développer $\det A$ par rapport à la première ligne et d'appliquer l'hypothèse de récurrence aux mineurs pour obtenir l'hérédité.

   Donc $\boxed{\forall A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \det\left(\overline{A}\right) = \overline{\det(A)}.}$

4. On a, comme C est à cœfficients réels et avec la question précédente,

   $\det\left(I_n+C^2\right) = \det((C+\mathrm{i}I_n)(C-\mathrm{i}I_n)) = \det(C+\mathrm{i}I_n)\det(C-\mathrm{i}I_n) = \det(C+\mathrm{i}I_n)\det\left(\overline{C+\mathrm{i}I_n}\right) = \det(C+\mathrm{i}I_n)\overline{\det(C+\mathrm{i}I_n)}$

   donc $\boxed{\det\left(I_n+C^2\right) = |\det(C-iI_n)|^2 \in \mathbb{R}^+}$ et $\boxed{\det\left(I_n+C^2\right)=0 \text{ ssi } \det(C-iI_n)=0 \text{ ssi } i\in\operatorname{Sp}(C).}$

II. Le cas général

1. On calcule $\begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\overline{C} & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n + C\overline{C} & -C \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$. En utilisant la propriété des déterminants triangulaires par blocs, on obtient en prenant le déterminant $\boxed{\det\begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix} \times 1 = \det\left(I + C\overline{C}\right).}$

---

2. On a directement $\boxed{\mathrm{Mat}_{(e_2,e_1)}(\varphi) = \begin{pmatrix} u & t \\ s & r \end{pmatrix}}$ avec la définition : $u(e_2) = ue_2 + se_1$ et $u(e_1) = te_2 + re_1$

---

3. Si u est l'endomorphisme canoniquement associé à $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$, $(e_1, \ldots, e_{2n})$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, alors la matrice de u dans la base $(e_{n+1}, \ldots, e_{2n}, e_1, \ldots, e_n)$ est $\begin{pmatrix} U & T \\ S & R \end{pmatrix}$ et la matrice de u dans la base $(e_1, \ldots, e_n, -e_{n+1}, \ldots, -e_{2n})$ (libre de bonne taille) est $\begin{pmatrix} R & -S \\ -T & U \end{pmatrix}$ donc $\boxed{\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} U & T \\ S & R \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} R & -S \\ -T & U \end{pmatrix} \text{ sont semblables.}}$

---

4. D'après la question précédente, C_0 est semblable à $\begin{pmatrix} I_n & \overline{C} \\ -C & I_n \end{pmatrix}$ qui est semblable à $\begin{pmatrix} I_n & -\overline{C} \\ C & I_n \end{pmatrix} = \overline{C}_0$.
Le polynôme caractéristique étant un invariant de similitude, et avec la question I.3, on obtient $\chi_{C_0} = \chi_{\overline{C_0}} = \overline{\chi_{C_0}}$ donc $\boxed{\chi_{C_0} \in \mathbb{R}[X].}$

---

5. (a) Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$. $\boxed{C_0\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)} = C_0\begin{pmatrix} -\overline{Y} \\ \overline{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{Y} - C\overline{X} \\ -\overline{C}\overline{Y} + \overline{X} \end{pmatrix} = \Omega\left(\begin{pmatrix} X - CY \\ \overline{C}X + Y \end{pmatrix}\right) \boxed{= \Omega\left(C_0\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right).}$

   (b) Vérification immédiate : pour tout $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$, $\Omega \circ \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = -\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, donc $\boxed{\Omega^2 = -\mathrm{id}.}$

   (c) Se vérifie directement avec la définition de Ω.

---

6. Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0_{\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}\}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \mu\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = 0$ donc $\lambda X - \mu\overline{Y} = 0$ (1) et $\lambda Y + \mu\overline{X} = 0$ (2).
Alors $\overline{\lambda}(1) + \mu\overline{(2)}$ donne $\left(|\lambda|^2 + |\mu|^2\right)X = 0$ et $-\mu\overline{(1)} + \overline{\lambda}(2)$ donne $\left(|\lambda|^2 + |\mu|^2\right)Y = 0$. Or soit $X \neq 0$, soit $Y \neq 0$ donc $|\lambda|^2 + |\mu|^2 = 0$ ce qui donne $\lambda = \mu = 0$ car on somme des nombres positifs : $\boxed{\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right) \text{ est libre.}}$

Soit $P = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right)$. On a, $\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) \in P$ et $\Omega\left(\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right) = -\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in P$ en utilisant 5.b, donc $\boxed{P \text{ est stable par } \Omega.}$

---

7. Un vecteur de $E \cap \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right)$ s'écrit $U = \alpha\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \beta\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) \in E$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

En composant par Ω, avec la question 5, on obtient $\Omega(U) = \overline{\alpha}\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) - \overline{\beta}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in E$ par stabilité de E.

Mais alors $\overline{\alpha}U - \mu\Omega(U) = \left(|\alpha|^2 + |\beta|^2\right)\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in E$. Comme $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \notin E$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 0$ donc $\alpha = \beta = 0$.

Ainsi, $\boxed{E \cap \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right) = \{0_{\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}\}.}$

---

8. Soit $U \in F_\lambda$. On montre que $\Omega(U) \in F_{\overline{\lambda}}$.

   Or $\left(\overline{\lambda} I_{2n} - C_0\right)\Omega(U) = \overline{\lambda}\Omega(U) - C_0\Omega(U) = \Omega(\lambda U) - \Omega(C_0 U)$ par la question 5. En observant la définition de Ω, on peut alors écrire, $\left(\overline{\lambda} I_{2n} - C_0\right)\Omega(U) = \Omega(\lambda U - C_0 U) = \Omega((\lambda I_{2n} - C_0)U)$.

   En réitérant $\alpha_{\overline{\lambda}}$ fois, on obtient $\left(\overline{\lambda} I_{2n} - C_0\right)^{\alpha_{\overline{\lambda}}}\Omega(U) = \Omega\left((\lambda I_{2n} - C_0)^{\alpha_{\overline{\lambda}}} U\right)$.

   Or $\chi_{C_0} \in \mathbb{R}[X]$ d'après 4, donc $\alpha_\lambda = \alpha_{\overline{\lambda}}$ et $\left(\overline{\lambda} I_{2n} - C_0\right)^{\alpha_{\overline{\lambda}}}\Omega(U) = \Omega\left((\lambda I_{2n} - C_0)^{\alpha_\lambda} U\right) = \Omega(0) = 0$ car $U \in F_\lambda$ et par linéarité.

   Finalement, $\Omega(F_\lambda) \subset F_{\overline{\lambda}}$ et comme, par 5.b, Ω est un isomorphisme, $\dim \Omega(F_\lambda) = \dim F_\lambda = \alpha_\lambda = \alpha_{\overline{\lambda}} = \dim F_{\overline{\lambda}}$ en utilisant le résultat admis.

   Ainsi, $\boxed{\Omega(F_\lambda) = F_{\overline{\lambda}}.}$

9. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0) \cap \mathbb{R}$. D'après la question précédente, F_λ est stable par Ω.

   Soit $F_\lambda = \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ et F_λ de dimension paire $(2n)$, soit on peut trouver $U \in \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \setminus F_\lambda$.

   Alors d'après 6 et 7, on a un plan P_1 stable par Ω tel que F_λ et P_1 sont en somme directe.

   Soit $E_1 = F_\lambda \oplus P_1$. E_1 est stable par Ω car F_λ et P_1 le sont et de dimension $\dim F_\lambda + 2$. Soit $E_1 = \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ et F_λ est de dimension paire $(2n-2)$, soit ce n'est pas le cas et on peut réitérer.

   Par récurrence, tant que le procédé ne s'arrête pas, on construit des plans $P_1, P_2, \dots, P_k$ tels que $E_k = F_\lambda \oplus P_1 \oplus \cdots \oplus P_k$ est un sous-espace stable par Ω et $P_1, \dots, P_k$ des plans stables.

   Comme $\dim E_k = \dim F_\lambda + 2k$ est strictement croissante et majorée par $2n$, le procédé s'arrête, donc on a un k tel que $E_k = F_\lambda \oplus P_1 \oplus \cdots \oplus P_k = \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ et donc $\boxed{\dim F_\lambda = 2n - 2k \text{ est paire.}}$

10. Comme χ_{C_0} est scindé, $\det C_0 = \displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, C_0} \lambda^{\alpha_\lambda}$.

    Or dans ce produit, soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et d'après la question précédente, $\lambda^{\alpha_\lambda} \in \mathbb{R}^+$, soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et comme $\chi_{C_0} \in \mathbb{R}[X]$, $\overline{\lambda} \in \mathrm{Sp}\, C_0$ avec $\alpha_{\overline{\lambda}} = \alpha_\lambda$ et en rassemblant λ et $\overline{\lambda}$ on obtient $|\lambda|^{2\alpha_\lambda} \in \mathbb{R}^+$.

    Finalement, $\boxed{\det C_0 \in \mathbb{R}^+.}$

    Remarque : avec un résultat vu en TD, on obtient bien $\det C_0 = \det\left(I_n + C\overline{C}\right)$ *car* I_n *est inversible et commute avec* $\overline{C}$.

Fin