Devoir en Temps Limité n° 4

À lire attentivement

- Les copies mal présentées, illisibles ou dans lesquelles les réponses aux questions ne seraient pas encadrées, et dans lesquelles il n'y aurait pas de trait tiré entre chaque question (ou sous-question) sur la largeur de la feuille seront **fortement sanctionnées, voire non corrigées**.
- Présentation et rédaction (concise, mais complète) sont une part importante de la notation.
- Il est IMPÉRATIF de respecter l'ordre des question (quitte à laisser des blancs pour « plus tard ».)
- Il est IMPÉRATIF d'utiliser un brouillon. Seules les questions abouties figurent sur la copie.
- Tout départ avant la fin des 4 heures n'est pas autorisé.
- LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISÉE.
- **Deux sujet au choix : type CCINP ou (exclusif) type CENTRALE. Ce dernier est calibré pour 3h. Vous pouvez y consacrer plus de temps, ou, si vous le souhaitez, traiter l'un des exercices CCINP pendant la 4e heure.**
- QUE LA FORCE SOIT AVEC VOUS.

SUJET CCINP

Problème 1 : Résultant de deux polynômes

Définition et propriétés

Soient p et q deux entiers naturels non nuls,

$$P=\sum_{k=0}^{p} a_kX^k \text{ et } Q=\sum_{k=0}^{q} b_kX^k$$

deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ avec $a_p\neq 0$ et $b_q\neq 0$.

Le résultant des polynômes P et Q est le nombre complexe noté $\mathrm{Res}(P,Q)$:

$$\mathrm{Res}(P,Q)=\begin{vmatrix} a_0 & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & b_1 & \ddots & \\ \vdots & & a_0 & \vdots & & b_0 \\ a_p & & a_1 & a_0 \;\; \vdots & & b_1 \\ & \ddots & \vdots & a_1 \;\; b_q & & \vdots \\ & & a_p & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & a_p & & b_q \end{vmatrix}.$$

C'est un déterminant $q+p$ colonnes, dont les q premières colonnes représentent les coefficients du polynôme P et les p suivantes représentent les coefficients du polynôme Q ; les positions non remplies étant des zéros. Par exemple, si $P=1+2X+3X^2$ et $Q=4+5X+6X^2+7X^3$,

$$\mathrm{Res}(P,Q)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

La matrice servant à définir $\mathrm{Res}(P,Q)$ pourra être notée $M_{P,Q}$:

$$\mathrm{Res}(P,Q)=\det M_{P,Q}.$$

On note $E=\mathbb{C}_{q-1}[X]\times\mathbb{C}_{p-1}[X]$ et $F=\mathbb{C}_{p+q-1}[X]$.

Soit u l'application de E dans F définie pour $(A,B)\in E$ par : $u(A,B)=PA+QB$.

1. **Cas où u est bijective**
   (a) Démontrer que u est une application linéaire.
   (b) Si on suppose que u est bijective, démontrer que P et Q sont premiers entre eux.
   (c) Si on suppose que P et Q sont premiers entre eux, déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et en déduire que u est bijective.
2. **Matrice de u**
   On note $\mathscr{B}=((1,0),(X,0),\dots,(X^{q-1},0),(0,1),(0,X),\dots,(0,X^{p-1}))$ une base de E et $\mathscr{B}'=(1,X,\cdots,X^{p+q-1})$ la base canonique de F.
   (a) Déterminer la matrice de u par rapport aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.
   (b) Démontrer que $\mathrm{Res}(P,Q)\neq 0$ si et seulement si P et Q sont premiers entre eux (donc $\mathrm{Res}(P,Q)=0$ si et seulement si P et Q ont au moins une racine commune complexe).
3. **Racine multiple**
   (a) Démontrer qu'un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine multiple dans $\mathbb{C}$ si et seulement si $\mathrm{Res}(P,P')=0$.
   (b) *Application* : déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme X^3+aX+b admette une racine multiple.

Applications

4. **Équation de Bézout**
   Dans cette question, on note $P=X^4+X^3+1$ et $Q=X^3-X+1$.
   (a) Démontrer, en utilisant la première partie, que les polynômes P et Q sont premiers entre eux.
   (b) On cherche un couple (A_0,B_0) de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tel que : $PA_0+QB_0=1$. Expliquer comment on peut trouver un tel couple en utilisant la matrice de u, puis donner un couple solution.
   (c) Déterminer tous les couples (A,B) de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant : $PA+QB=1$.
   On pourra commencer par remarquer que, si (A,B) est un couple solution, alors $P(A-A_0)=Q(B_0-B)$.
5. **Nombre algébrique**
   En utilisant les polynômes $P(X)=X^2-3$ et $Q_y(X)=(y-X)^2-7$, déterminer un polynôme à coefficients entiers de degré 4 ayant comme racine $\sqrt{3}+\sqrt{7}$. Quelles sont les autres racines de ce polynôme ?

Problème 2 : Pour tout $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \det\left(I_n + C\overline{C}\right) \in \mathbb{R}^+$

Dans ce problème, n désigne un entier non nul fixé.

On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (respectivement $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$ (respectivement $\mathbb{R}$), $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices inversibles de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices colonnes de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\chi_M = \det(XI_n - M)$ son polynôme caractéristique et $\mathrm{Sp}(M)$ l'ensemble de ses valeurs propres complexes. On pourra utiliser librement les produits matriciels par blocs.

Objectifs

On s'intéresse dans la **Partie I** à deux cas particuliers.

On montre d'abord que $\det\left(I_n + C\overline{C}\right) \geqslant 1$ dans le cas particulier des matrices diagonales complexes C, où $\overline{C}$ désigne la matrice conjuguée de C, c'est-à-dire la matrice obtenue en considérant le conjugué de chaque coefficient de C.

On considère ensuite le cas des matrices réelles C pour lesquelles on démontre que $\det\left(I_n + C^2\right) \in \mathbb{R}^+$.

La **Partie II** est consacrée au cas général.

On montre que pour toute matrice C de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\det\left(I_n + C\overline{C}\right) \in \mathbb{R}^+$.

I. Deux cas particuliers

1. On se place dans le cas particulier où C est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale. Démontrer que $\det\left(I_n + C\overline{C}\right) \in \mathbb{R}$ et que :
$$\det(I_n + C\overline{C}) \geqslant 1,$$
avec égalité si et seulement si $C = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$.
2. On se place dans le cas particulier où C est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Démontrer que :
$$\det\left(I_n + C^2\right) \geqslant 1,$$
avec égalité si et seulement si $C = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.
3. Démontrer par récurrence sur n que : $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \det\left(\overline{A}\right) = \overline{\det(A)}$.
4. On suppose dans cette question que C est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Déduire de la question précédente que, dans ce cas, on a :
$$\det(I_n + C^2) = |\det(C - iI_n)|^2.$$
En déduire que $\det\left(I_n + C^2\right) \in \mathbb{R}^+$ et que $\det\left(I_n + C^2\right) = 0$ si et seulement si $i \in \mathrm{Sp}(C)$.

II. Le cas général

On considère dans cette partie une matrice C de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et on démontre que $\det\left(I_n + C\overline{C}\right) \in \mathbb{R}^+$. Seule la question 3. de la partie I sera utile pour la suite.

1. En considérant le produit matriciel $\begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\overline{C} & I_n \end{pmatrix}$, démontrer que :
$$\det\left(I_n + C\overline{C}\right) = \det\begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix}$$
On notera désormais : $C_0 = \begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix}$
2. Soient $(r,s,t,u) \in \mathbb{C}^4$ et (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{C}^2$. On note φ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dont la matrice dans la base (e_1, e_2) est $\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$. Exprimer la matrice de φ dans la base (e_2, e_1).
3. Soit $(R,S,T,U) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^4$. En s'inspirant de la question précédente, montrer que la matrice $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ est semblable dans $\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$ à la matrice $\begin{pmatrix} U & T \\ S & R \end{pmatrix}$. Montrer de même que $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} R & -S \\ -T & U \end{pmatrix}$.
4. En déduire que le polynôme caractéristique de la matrice C_0 est à coefficients réels.

Pour la suite, nous écrirons les vecteurs de $\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ sous la forme $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, où $(X,Y) \in (\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}))^2$.

On considère l'application $\Omega : \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \to \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ définie par :
$$\forall \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C}),\ \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\overline{Y} \\ \overline{X} \end{pmatrix}.$$

5. Démontrer les propriétés suivantes de l'application Ω :
   (a) Pour tout $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$, $C_0\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \Omega\left(C_0\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)$;
   (b) $\Omega \circ \Omega = -\mathrm{id}_{\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}$;
   (c) Pour tout $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\Omega\left(\lambda\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right) = \overline{\lambda}\Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)$
6. Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0_{\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}\}$.

   Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right)$ est libre et que le plan $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right)$ est stable par Ω.
7. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ stable par Ω et soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C}) \setminus E$.

   Montrer que :
$$E \cap \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \Omega\left(\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)\right) = \{0_{\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})}\}.$$

Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0)$, on note $\alpha_\lambda \in \mathbb{N}^*$ sa multiplicité comme racine du polynôme caractéristique. On peut donc écrire : $\chi_{C_0} = \prod_{\lambda \,\mathrm{Sp}(C_0)} (X - \lambda)^{\alpha_\lambda}$. On note alors, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0)$:
$$F_\lambda = \mathrm{Ker}\left((\lambda I_{2n} - C_0)^{\alpha_\lambda}\right).$$

On admet, pour traiter la question 10. que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0)$, on a : $\dim F_\lambda = \alpha_\lambda$.

8. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0)$, on a : $\Omega(F_\lambda) = F_{\overline{\lambda}}$.
9. Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(C_0) \cap \mathbb{R}$, alors F_λ est de dimension paire.
10. Conclure que : $\det(C_0) \in \mathbb{R}^+$.

FIN DE L'ÉNONCÉ

SUJET CENTRALE

Problème 1 : Polynômes et diagonalisabilité

Soit n un entier au moins égal à 2.
Pour i entier variant de 0 à n, on considère le polynôme

$$P_i = (1-X)^i (1+X)^{n-i}$$

si $a_{i,j}$ est le coefficient de X^{i-1} dans P_{j-1}, soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.
On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathscr{B} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de E.

1. Dans cette question seulement $n = 2$.
   Expliciter A et déterminer ses éléments propres.
2. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de E.
   (On pourra étudier, pour i fixé, les indices j tels que $(1+X)^{n-i}$ divise P_j.)
3. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u) = A$.
   (a) Calculer, pour tout j, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} a_{ij} P_{i-1}$.
   (b) Calculer A^2.
   Pour les 5/2 seulement : en déduire le polynôme minimal de A.
   A est-elle diagonalisable ?
   (c) Calculer $\left|\det(A)\right|$.
4. On suppose n impair dans cette question. Soit $m = (n-1)/2$.
   (a) Montrer que $\mathscr{B}_1 = (1, X, \dots, X^m, P_0, \dots, P_m)$ est une base de E
   (on pourra étudier les diviseurs communs à $P_0, \dots, P_m$.)
   (b) Déterminer $\mathscr{M}_{\mathscr{B}_1}(u)$.
   En déduire le déterminant et la trace de A.
   (c) Quelles sont les valeurs propres de A ?
5. On suppose maintenant que n est pair et l'on pose $m = n/2$.
   (a) Montrer que $\mathscr{B}_2 = (1, X, \dots, X^{m-1}, P_0, \dots, P_m)$ est une base de E.
   (b) Déterminer $\mathscr{M}_{\mathscr{B}_2}(u)$.
   En déduire le déterminant et la trace de A.
   (c) Quelles sont les valeurs propres de A ?

Problème 2 : Caractérisation des comatrices

Soit n un entier au moins égal à 3. Si $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{Com}A$ sa comatrice, de terme général C_{ij}, cofacteur de a_{ij} dans A. On rappelle les relations :

$$A \times (\mathrm{Com}A)^\intercal = (\mathrm{Com}A)^\intercal \times A = (\det A) \cdot I_n.$$

On confond polynôme et fonction polynomiale associée, et on note $\chi_A = \det(XI_n - A)$.
On se propose de caractériser les matrices qui sont des comatrices.

1. Soient $A_0, A_1, \dots, A_r$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et pour tout $t \in \mathbb{C}$, $\varphi(t) = \displaystyle\sum_{i=0}^{r} t^i A_i$.
   Montrer que si φ s'annule pour plus de r valeurs, alors les A_i sont toutes nulles.
2. (a) Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, montrer l'existence et l'unicité des matrices $R_0, \dots, R_{n-1}$ telles que :
   $$\forall\, t \in \mathbb{C}, [\mathrm{Com}(A - tI_n)]^\intercal = \sum_{i=0}^{n-1} t^i R_i.$$
   (b) Soit P le polynôme défini par $P(t) = (-1)^n \dfrac{\chi_A(0) - \chi_A(t)}{t}$ pour $t \in \mathbb{C}^*$.
   Démontrer $\mathrm{Com}A = P(A^\intercal)$.
3. (a) Si A est de rang n, montrer que $\mathrm{Com}A$ est de rang n.
   Que vaut $\mathrm{Com}\big(\mathrm{Com}A\big)$?
   (b) Si A est de rang $n-1$ et si $L_1, \dots, L_n$ sont les lignes de A, calculer $(\mathrm{Com}A) \times L_i^\intercal$ pour tout i et vérifier que le rang de $\mathrm{Com}A$ est 1.
   (c) Montrer que si le rang de A est au plus $n-2$, alors $\mathrm{Com}A$ est nulle.
4. Soient M et N dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
   (a) Si M et N sont inversibles, montrer que $\mathrm{Com}(MN) = \mathrm{Com}\,M\,\mathrm{Com}\,N$.
   (b) Soient $M(t) = M - tI_n$ et $N(t) = N - tI_n$ pour t complexe. Montrer que, pour tout t de module assez petit, $\mathrm{Com}\big(M(t)N(t)\big) = \mathrm{Com}\big(M(t)\big)\mathrm{Com}\big(N(t)\big)$.
   (c) Vérifier que, pour M et N quelconques, $\mathrm{Com}(MN) = \mathrm{Com}\,M\,\mathrm{Com}\,N$.
   (d) Si M est une matrice de projection, que peut-on dire de $\mathrm{Com}\,M$?
5. Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, matrice de projection de rang $n-1$.
   (a) Déterminer χ_A.
   (On pourra utiliser une base de $\mathrm{Im}A$ et une base de $\mathrm{Ker}A$.)
   (b) Montrer que $\mathrm{Com}A = I_n - A^\intercal$.
   (c) Si M est une matrice de projection de rang 1 dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que M est une comatrice.
6. Soit M dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, M diagonalisable de rang 1.
   (a) Montrer l'existence de λ complexe tel que λM est une matrice de projection.
   (b) Montrer que M est une comatrice.
7. Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, A non diagonalisable de rang 1.
   (a) Montrer que $A^2 = 0$ et que A est semblable à $A_1 = (\alpha_{ij})$, avec $\alpha_{1n} = 1$ et $\alpha_{ij} = 0$ sinon.
   (b) Soit $D_1 = (\beta_{ij})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, avec $\beta_{ii} = 1$ pour $i = 2, \dots, n-1$, $\beta_{1n} = -1$ et $\beta_{ij} = 0$ dans tous les autres cas.
   Calculer $D_1^2 - D_1$, D_1A_1 et A_1D_1.
   Que vaut le rang de D_1 ?
   (c) Montrer l'existence de D de rang $n-1$ telle que $D^2 - D = A$, $AD = DA = 0$ et $I_n - D$ est de rang 2.
   Comparer D^3 et D^2.
   (d) Montrer que $\chi_D = X^2(X-1)^{n-2}$ et en déduire $\mathrm{Com}\,D$.
   (e) Montrer que A est une comatrice.
8. Caractériser les éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ qui sont des comatrices.

FIN DE L'ÉNONCÉ