# Déterminants et formule de condensation
# un corrigé

## 1 Préliminaires.

**Q.1.** On a quatre propriétés à vérifier.
- $N$ est clairement positive.
- Si $N(M) = 0$ alors $\forall i, j,\ 0 \leq |M_{i,j}| \leq N(M) = 0$ donne la nullité de tous les $M_{i,j}$ et de $M$. On a ainsi l'axiome de séparation.
- Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On

$$\forall i, j,\ |(A+B)_{i,j}| = |A_{i,j} + B_{i,j}| \leq |A_{i,j}| + |B_{i,j}| \leq N(A) + N(B)$$

En passant au maximum (ou borne sup) on en déduit que $N(A+B) \leq N(A) + N(B)$ ce qui donne l'inégalité triangulaire.
- Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\forall i, j,\ |(\lambda A)_{i,j}| = |\lambda A_{i,j}| = |\lambda|.|A_{i,j}| \leq |\lambda|.N(A)$$

En passant au maximum, on en déduit que $N(\lambda A) \leq |\lambda| N(A)$. Si $\lambda = 0$, l'égalité est immédiate. Sinon, on écrit que

$$N(A) = N(\frac{1}{\lambda}\lambda A) \leq \frac{1}{|\lambda|} N(\lambda A)$$

pour obtenir l'inégalité dans l'autre sens. On a finalement l'égalité dans tous les cas et l'homogénéité.

**Q.2.** $r$ est le rang de la matrice. Le résultat rappelé concerne l'équivalence des matrices (deux matrices ont même rang si et seulement si elles sont équivalentes).

**Q.3.** Posons $J_k = J + \frac{1}{2^k} I_n$ ; c'est une matrice inversible (diagonale à coefficients diagonaux non nuls). Por tout $i, j$, on a $(J_k)_{i,j} \to J_{i,j}$ quand $k \to +\infty$. Multiplier par $P$ et $Q$ revient, en termes de coefficients, à faire des somme et des produits par des constantes. Ainsin chaque suite coordonnée de $(PJ_kQ)$ converge vers la coordonnée correspondante de $PJQ$ (théorèmes généraux) et donc $N(PJ_kQ - PJQ) \to 0$ quand $k \to +\infty$. Ceci montre que par exemple en majorant $N(A)$ par la somme des $|A_{i,j}|$)

$$\lim_{k \to +\infty} PJ_kQ = M$$

au sens de la norme $N$ (et de toute norme puisqu'en dimension finie elles sont toutes équivalentes).

**Q.4.** On rappelle que

$$\det(M) = \sum_{s \in S_n} \varepsilon(s) M_{s(1),1} M_{s(2),2} \dots M_{s(n),n}$$

$\det(M)$ est ainsi une expression polynomiale des coefficients de $M$ et donc une expression continue de ces coefficients. det est donc continue (comme ci-dessus et le choix de la norme n'importe pas).
On peut aussi conclure en disant que det est multilinéaire en dimension finie.

## 2 Formule de condensation.

**Q.5.** D'après la formule de développement par rapport à la $i$-ème ligne du déterminant, on a

$$\det(M) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} M_{i,k} \gamma_{i,k}$$

où $\gamma_{i,k}$ est un cofacteur et vaut donc $\det[M]_i^k$. On a ainsi

$$(-1)^{i+1}\det(M) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} M_{i,k}\det[M]_i^k$$

**Q.6.** Considérons la matrice $M'$ obtenue à partir de $M$ en remplaçant la ligne $i$ par la ligne $j$. Comme $j \neq i$, cette matrice est non inversible (deux lignes égales) et donc de déterminant nul. En outre, $\forall k,\ [M']_i^k = [M]_i^k$ (puisque l'on supprime l'unique ligne qui diffère). La formule de la question précédente donne alors

$$0 = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} M'_{i,k}\det[M']_i^k = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} M_{j,k}\det[M]_i^k$$

**Q.7.** On a

$$\forall i,j,\ (M^t com(M))_{i,j} = \sum_{k=1}^n M_{i,k}(com(M))_{j,k} = \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} M_{i,k}\det[M]_j^k$$

La question 5 montre que ce coefficient vaut $\det(M)$ si $i=j$ et la question 6 montre qu'il est nul si $j \neq k$. On a ainsi

$$M.{}^t com(M) = \det(M) I_n$$

**Q.8.** Pour le calcul de $\det(M^*)$ on opère un développement par rapport à la seconde colonne et on recommence avec le nouveau déterminant etc. On a alors

$$\det(M^*) = \begin{vmatrix} \det[M]_1^1 & (-1)^{n+1}\det[M]_n^1 \\ (-1)^{n+1}\det[M]_1^n & \det[M]_n^n \end{vmatrix} = \det[M]_1^1\det[M]_n^n - \det[M]_1^n\det[M]_n^1$$

**Q.9.** Un calcul élémentaire donne

$$MM^* = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^n (-1)^{k-1}M_{1,k}\det[M]_1^k & m_{1,2} & \dots & m_{1,n-1} & \sum\limits_{k=1}^n (-1)^{n+k}M_{1,k}\det[M]_n^k \\ \sum\limits_{k=1}^n (-1)^{k-1}M_{2,k}\det[M]_1^k & m_{2,2} & \dots & m_{2,n-1} & \sum\limits_{k=1}^n (-1)^{n+k}M_{2,k}\det[M]_n^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^n (-1)^{k-1}M_{n-1,k}\det[M]_1^k & m_{n-1,2} & \dots & m_{n-1,n-1} & \sum\limits_{k=1}^n (-1)^{n+k}M_{n-1,k}\det[M]_n^k \\ \sum\limits_{k=1}^n (-1)^{k-1}M_{n,k}\det[M]_1^k & m_{n,2} & \dots & m_{n,n-1} & \sum\limits_{k=1}^n (-1)^{n+k}M_{n,k}\det[M]_n^k \end{pmatrix}$$

Avec les questions 5 et 6, ceci se simplifie en

$$M^*M = \begin{pmatrix} \det(M) & m_{1,2} & \dots & m_{1,n-1} & 0 \\ 0 & m_{2,2} & \dots & m_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & m_{n-1,2} & \dots & m_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & m_{n,2} & \dots & m_{n,n-1} & \det(M) \end{pmatrix}$$

**Q.10.** On calcule $\det(MM^*)$ en développant par rapport à la dernière colonne puis par rapport à la première. Ceci donne

$$\det(MM^*) = \det(M)^2\det[M]_{1,n}^{1,n}$$

Comme $\det(M)\det(M^*) = \det(MM^*)$, on peut simplifier par $\det(M)$ dans la formule précédent quand $M$ est inversible et, avec la question 8, on obtient

$$\det[M]_1^1\det[M]_n^n - \det[M]_1^n\det[M]_n^1 = \det(M)\det[M]_{1,n}^{1,n}$$

**Q.11.** Dans le cas général, la question 3 permet de trouver une suite $(M_k)$ de matrices inversibles qui converge vers $M$. On applique la question 10 à $M_k$ et on fait tendre $k$ vers $+\infty$. Compte-tenu de la continuité de la fonction déterminant, on obtient la formule dans le cas général.

## 3 Algorithme de Lewis Carroll.

**Q.12.** On a

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } B^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} -8 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice vaut donc $-8$.

**Q.13.** Le calcul des $B^{(k)}$ est immédiat (on déduit cette matrice de $A^{(k-1)}$). Le calcul de chaque coefficient de $A^{(k)}$ entraîne le calcul d'un déterminant. Cette matrice a $(n-k)^2$ coefficients. Le calcul de $A^{(n-1)}$ implique donc le calcul d'un nombre de déterminants de taille 2 égal à

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2 = \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

**Q.14.** La question est un peu ambigüe : un même déterminant de taille deux peut intervenir le calcul de deux cofacteurs différents et l'énoncé ne dit pas s'il faut alors le compter une fois ou plusieurs fois (et donc si on a le droit, ou pas, de stocker les déterminants de taille deux que l'on calcule au fur et à mesure).

De manière naïve (sans stockage), on a (puisqu'il y a $n$ cofacteurs de taille $n-1$)

$$\forall n \geq 2,\ v_n = n v_{n-1}$$

et ainsi $v_n = \frac{n!}{2}$. Dans ce cas, $u_n = o(v_n)$.

**Q.15.** D'après la formule de condensation appliquée, on a

$$M_{r+1,s+1} \begin{vmatrix} M_{r,s} & M_{r,s+1} & M_{r,s+2} \\ M_{r+1,s} & M_{r+1,s+1} & M_{r+1,s+2} \\ M_{r+1,s} & M_{r+1,s+1} & M_{r+1,s+2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_{r+1,s+1} & M_{r+1,s+2} \\ M_{r+2,s+1} & M_{r+2,s+2} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} M_{r,s} & M_{r,s+1} \\ M_{r+1,s} & M_{r+1,s+1} \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} M_{r+1,s} & M_{r+1,s+1} \\ M_{r+2,s} & M_{r+2,s+1} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} M_{r,s+1} & M_{r,s+2} \\ M_{r+1,s+1} & M_{r+1,s+2} \end{vmatrix}$$

En revenant aux définitions de $A^{(1)}$ et $A^{(2)}$ ceci s'écrit

$$A^{(2)}_{r,s} = \begin{vmatrix} M_{r,s} & M_{r,s+1} & M_{r,s+2} \\ M_{r+1,s} & M_{r+1,s+1} & M_{r+1,s+2} \\ M_{r+1,s} & M_{r+1,s+1} & M_{r+1,s+2} \end{vmatrix}$$

**Q.16.** Pour $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$ et $1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n$, notons $\{M\}^{j_1,j_2,\dots,j_r}_{i_1,i_2,\dots,i_r}$ la matrice de taille $r$ obtenue à partir de $M$ en ne selectionnant que les éléments de $M$ sur les lignes $i_k$ et les colonnes $j_k$.

On prouve par récurrence que la proposition

$$\forall r, s \in \{1, \dots, n-k\},\ A^{(k)}_{r,s} = \det(\{M\}^{s,s+1,\dots,s+k}_{r,r+1,\dots,r+k})$$

est vraie pour tout $k = 1, \dots, n-1$.

- <u>Initialisation.</u> Le résultat est vrai au rang 1 par définition de $A^{(1)}$. On vient (question précédente) de le prouver au rang 2.

- Hérédité. Soit $k \in \{2, \dots, n-1\}$ tel que la propriété soit vrai jusq'au rang $k-1$. En appliquant la formule de condensation à la matrice $\{M\}_{r,r+1,\dots,r+k}^{s,s+1,\dots,s+k}$, on obtient

$$\begin{aligned}\det(\{M\}_{r,r+1,\dots,r+k}^{s,s+1,\dots,s+k})\det(\{M\}_{r+1,\dots,r+k-1}^{s+1,\dots,s+k-1}) &= \det(\{M\}_{r+1,\dots,r+k}^{s+1,\dots,s+k})\det(\{M\}_{r,r+1,\dots,r+k-1}^{s,s+1,\dots,s+k-1}) \\ &- \det(\{M\}_{r,r+1,\dots,r+k-1}^{s+1,\dots,s+k})\det(\{M\}_{r+1,\dots,r+k}^{s,s+1,\dots,s+k-1})\end{aligned}$$

  Avec l'hypothèse de récurrence et la définition de $A^{(k)}$ et $B^{(k)}$, on obtient le résultat au rang $k$.

Le résultat au rang $n-1$ donne alors exactement

$$A_{1,1}^{(n-1)} = \det(M)$$

# 4 Le $\lambda$-déterminant.

**Q.17.** Montrons le résultat par récurrence sur la taille de la matrice $M$ que

$$\det{}_\lambda(M_{t,j}) = t\det{}_\lambda(M)$$

- Le résultat est vrai aux rangs 1 et 2 (vérification immédiate).
- Supposons le résultat vrai pour des matrices de taille $n-1 \leq 2$. Soit $M$ une matrice de taille $n$, on veut écrire

$$\det{}_\lambda(M_{t,j})\det{}_\lambda[M_{t,j}]_{1,n}^{1,n} = \det{}_\lambda[M_{t,j}]_1^1\det{}_\lambda[M_{t,j}]_n^n + \lambda\det{}_\lambda[M_{t,j}]_n^1\det{}_\lambda[M_{t,j}]_1^n$$

  Si $j \notin \{1,n\}$, on a $[M_{t,j}]_{1,n}^{1,n} = ([M]_{1,n}^{1,n})_{t,j-1}$ (multiplier la colonne $j$ par $t$ puis enlever les lignes et colonnes 1 et $n$ revient à d'abord enlever les lignes et colonnes puis à multiplier la colonne $j-1$ -les colonnes ont changé de numéro- par $t$). Par hypothèse de récurrence, on a donc

$$\det{}_\lambda[M_{t,j}]_{1,n}^{1,n} = t\det{}_\lambda[M]_{1,n}^{1,n}$$

  On procède de même avec les $\lambda$-déterminants du membre de droite (il y a décalage d'indice de colonne si on enlève la colonne $n$ mais on a vu que cela n'a pas d'incidence sur le calcul) et on divise par $t \neq 0$ pour obtenir le résultat.
  Si $j = n$ ou $j = 1$ alors $\det{}_\lambda[M_{t,n}]_{1,n}^{1,n} = \det{}_\lambda[M]_{1,n}^{1,n}$. On adapte alors le raisonnement (plus simple car il n'y a pas à diviser par $t$) pour obtenir encore la formule.

**Q.18.** On montre par récurrence sur $n$ que (les $x_i$ vérifiant les hypothèses de l'énoncé)

$$\det{}_\lambda V(x_1,\dots,x_n) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j+\lambda x_i)$$

- C'est vrai au rang 2 ($\det{}_\lambda V(x_1,x_2) = x_2 + \lambda x_1$) et au rang 3 puisqu'un calcul donne

$$x_2\det{}_\lambda V(x_1,x_2,x_3) = x_2(x_2+\lambda x_1)(x_3+\lambda x_1)(x_3+\lambda x_2)$$

  et que l'on peut diviser par $x_2 \neq 0$.
- Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $n-1 \geq 3$. On a

$$[V(x_1,\dots,x_n)]_{1,n}^{1,n} = \Phi(V(x_2,\dots,x_{n-1}))$$

  où $\Phi(M)$ s'obtient à partir de $M$ en multipliant la colonne $j$ par $x_{j+1}$ pour $j = 1,\dots,n-2$. D'après la question précédente itérée, on a

$$\det{}_\lambda\Phi(M) = x_2\dots x_{n-1}\det(M)$$

L'hypothèse de récurrence donne alors

$$\det{}_\lambda[V(x_1,\dots,x_n)]_{1,n}^{1,n} = x_2 \dots x_{n-1} \prod_{2 \le i < j \le n-1} (x_j + \lambda x_i)$$

De façon similaire, on a

$$\det{}_\lambda[V(x_1,\dots,x_n)]_1^1 = x_2 \dots x_n \prod_{2 \le i < j \le n} (x_j + \lambda x_i)$$

$$\det{}_\lambda[V(x_1,\dots,x_n)]_n^n = \prod_{1 \le i < j \le n-1} (x_j + \lambda x_i)$$

$$\det{}_\lambda[V(x_1,\dots,x_n)]_1^n = x_1 \dots x_{n-1} \prod_{1 \le i < j \le n-1} (x_j + \lambda x_i)$$

$$\det{}_\lambda[V(x_1,\dots,x_n)]_n^1 = \prod_{2 \le i < j \le n} (x_j + \lambda x_i)$$

En remplaçant dans la "définition" de $\det{}_\lambda V(x_1,\dots,x_n)$, on obtient la bonne formule.