1.2.C - MATHEMATIQUES 1 - filière PSI

I) REMARQUES GENERALES

Le sujet portait sur l'étude dans l'espaces C^0 des fonctions continues et $1-$périodiques d'un opérateur de transfert dans le but de mettre en évidence la propriété de "trou spectral".

Un sujet intéressant, plein de questions à difficultés plus que raisonnables, combinant à la fois l'algèbre et l'analyse. Les préliminaires de la partie I, suivis des outils et propriétés de la partie II, emmènent progressivement les élèves à aborder la partie III où l'auteur leur fait découvrir les propriétés de diverses restrictions l'opérateur T défini pour tout $f \in C^0$ et pour tout x réel par

$$Tf(x) = \frac{1}{2}\left[f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x+1}{2}) \right]$$

à des sous-espaces invariants de C^0.

Sans être exhaustif, citons les thèmes principalement abordés :

- les fonctions continues et 1-périodiques
- les raisonnements par récurrence
- les espaces vectoriels normés
- la stabilité d'un sous-espace par un endomorphisme
- la projection sur une droite parallèlement à un hyperplan
- les sous-espaces vectoriels engendrés par les fonctions trigonométriques
- la recherche des valeurs propres et diagonalisation, puissance et noyau d'un endomorphisme
- les transformations de Fourier
- la convergence d'une série de fonctions
- décomposition et majoration des intégrales

Le sujet au premier regard semble être aisé. Mais bon nombre des élèves se sont souvent trompés dans les calculs après un changement de variables faux ou une majoration trop hâtive, ou encore une fausse conception due à une mauvaise compréhension. A cela s'ajoute le grand manque de rigueur dans les raisonnements et les fautes d'étourderie.

Dans les calculs des coefficients des séries de Fourier, les correcteurs ne se sont pas étonnés de ne pas voir les bonnes constantes de normalisation (les élèves ayant l'habitude d'utiliser seulement les fonctions $2\pi-$périodiques). Cela n'altérant pas le résultat demandé, aucune sanction n'a été appliquée.

Les correcteurs ont été surpris par le niveau assez bas des copies et se posent des questions face à cette "crise" de la moyenne. Certains présument que ceci provient de la difficulté des élèves à aborder le sujet qui finalement ne se révélait pas être si facile que ça. D'autres évoquent (et tirent le signal d'alarme) le niveau même des candidats qui commence à devenir inquiétant. Signalons par exemple la question-6 de cette année qui porte sur la diagonalisation d'une matrice 5x5 qui contient 22 zéros et trois 1: seulement moins de 10% de réponses correctes.

Néanmoins, le sujet a été traité dans sa quasi-totalité par quelques très bonnes copies et a permis de départager l'ensemble des candidats.

II) REMARQUES PARTICULIERES

Q.1 Question bien traitée dans l'ensemble sauf dans de rares copies où la notion de 1-périodicité n'est pas maîtrisée. Erreur du genre : $f(x+1) = f(x) \Rightarrow f(\frac{x+1}{2}) = f(\frac{x}{2})$

Q.2 L'inégalité large

$$\sup_{\|f\|=1} \|Tf\|_\infty \leq 1$$

a été bien démontrée. La plupart des candidats a laissé de côté la démonstration de l'égalité. Pourtant il suffisait de montrer que le sup est atteint en prenant par exemple $f = e_0$.

Q.3 On voit encore souvent des changements de variables mal faits (bornes inchangées).

Q.4 Certains candidats assènent sans justification ni a priori ni a posteriori que $Pf = \int_0^1 f(t)dt.e_0$. On ne sait pas d'où cela provient ni si cela convient.

Q.5 En distinguant les cas k pair et k impair, on aperçoit facilement la $T-$stabilité des espaces E_n. La plupart ont négligé (ou oublié) la $P-$ stabilité.

Q.6 Citons d'abord ceux qui n'ont pas su écrire la matrice de T_2 dans la base $(e_0, e_1, e_{-1}, e_2, e_{-2})$. Puis ceux qui se sont trompés en cherchant le polynome caractéristique (facile, car la matrice était triangulaire). Certains sont parvenus à montrer que 0 et 1 étaient valeurs propres sans pouvoir démontrer qu'elles s'avéraient être les seules. La plupart ne maîtrisent pas la recherche du sous-espace propre associé à une valeur propre donnée. Rares sont ceux qui sont arrivés à montrer correctement que la matrice de l'endomorphisme T_2 n'était pas diagonalisable.

Q.7 Beaucoup d'incompréhensions sur la variable de recurrence. On voit des raisonnements par recurrence sur n et sur k.

Q.8 Ceux qui ne se sont pas trompés dans les changements de variables ont pu aisément montrer que $c_n(Tf) = c_{2n}(f)$.

Q.9 On remarque que certains ont seulement calculé le noyau de T dans l'espace des polynomes trigonométriques.

L'implication $Tf = 0 \Rightarrow c_{2n}(f) = 0$ a été bien traitée par la majorité des candidats. Seulement une minorité a eu l'idée d'utiliser l'égalité de Parseval pour démontrer la réciproque.

Q.10 Majoration bien traitée dans l'ensemble, mais parfois trop hâtive pour certains qui n'ont pas réussi à montrer d'où venait le coefficient $2^{-\alpha}$

Q.11 Inégalité établie dans l'ensemble en combinant la question 10 et la question 2. Par contre, la plupart [a] laissé de côté la démonstration de l'égalité $\sup_{\|f\|_\alpha = 1} \|Tf\|_\alpha = 1$. Pourtant, il suffisait de penser à e_0.

Q.12 La convergence normale de la série a été bien maîtrisée dans l'ensemble. Nombreux ont par la suite réussi à en déduire la convergence uniforme ainsi que la continuité et la $1-$périodicité de f_λ. Plusieurs ont calculé l'effet de T directement sur la série infinie (ce que très rigoureusement on n'a pas le droit de faire sans utiliser explicitement la continuité de T).

Q.13 La réponse était longue à rédiger. Un début de majoration bien entamé mais non abouti dans la plupart des cas. La difficulté étant de trouver une constante qui ne dépendait pas de n.

Q.14 Question bien traitée, facile en faisant référence aux questions 3 et 10.

Q.15 Dans l'ensemble, on voit un bon début du raisonnement par récurrence qui a fréquemment dégénéré suite à une mauvaise interprétation de $T^{n+1}f(x)$ ou bien à un changement d'indice non abouti. En effet la plupart sont arrivés à :

$$T^{n+1}f(x)=\frac{1}{2^{n+1}}\left[\sum_{k=0}^{2^n-1}f\left(\frac{x+k}{2^{n+1}}\right)+\sum_{k=0}^{2^n-1}f\left(\frac{x+k+2^n}{2^{n+1}}\right)\right]$$

Un petit changement d'indice $j=k+2^n$ dans la deuxième somme permettait de conclure.

Q.16 Il fallait découper l'integrale en petits bouts pour ensuite appliquer la propriété $\alpha-$höldérienne de f sur des intervalles de longueur 2^{-n}. Ceci a échappé à la majorité des candidats.

Q.17 Dire que l'intégrale $\int_0^1 f(t)dt=0$ puisque $f\in H^0$ permet déjà de gagner un point. Le fait de mentionner et itérer le résultat de la question 10 (pour faire apparaitre le facteur $2^{-n\alpha}$) permettait d'en gagner encore plus. Le reste s'obtient en utilisant la question 16. Très peu de candidats sont parvenus à synthétiser cette question.

Q.18 On constate un abandon ou un survol très superficiel de cette difficile question. Dire que 1 est valeur propre et que tous les complexes de module inférieur à $2^{-\alpha}$ sont des valeurs propres a été faisable pour eux. Mais de là à trouver que la fonction $f-Pf\in H^\alpha$ et qu'elle vérifie la propriété de la question 17 pour ensuite montrer que $|r|\leq 2^{\frac{1}{n}-\alpha}$ afin de s'étendre vers l'infini pour apercevoir le *trou spectral*, a été un vrai casse-tête pour l'ensemble.

III) CONSEILS AUX CANDIDATS

Bon nombre de candidats se sont laissés impressionner par les mots : opérateur de transfert, trou spectral, inégalités höldériennes ou bien ont été déroutés par les décompositions diadiques ou diagonalisation d'une matrice 5x5.

• Sachez que le processus d'élaboration de sujet est assez complexe mais que les outils mis à votre disposition devraient toujours vous permettre de le faire.

• Bien lire le sujet (prenez le temps de la reflexion) car il est aberrant d'en voir certains qui ont systématiquement remplacé $f(x)$ par λx dans tout le sujet.

• Bien apprendre le cours, car ne pas connaître les notions de base telles que la définition de la convergence normale, le calcul des valeurs propres et sous espaces propres, sont inadmissibles.

• Eviter les écritures insensées du type $\|f(x)\|_\infty$.

• Soyez rigoureux dans vos démonstrations. Essayez d'expliquer logiquement vos réponses car les formules parachutées sont mal vues.

• Répondez clairement à la question posée et prenez garde aux grapillages.