Dans tout l'exercice n est un entier naturel non nul.

Soit φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$.

1. La famille $\mathcal{B}$ est contituée de $n+1$ polynômes de degrés échelonnés : c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Généralités sur φ

2.1. L'application φ est une application linéaire puisque l'intégrale est linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$: c'est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2.2. Comme φ n'est pas nulle, $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ et d'après le théorème du rang, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$, donc de dimension n.

3. On considère alors l'application ψ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme Q tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad Q(x) = \int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t.$$

3.1. La linéarité de l'application ψ découle immédiatement de la linéarité de l'intégrale.

3.2. Notons $C = (P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$: $\forall\, k \in [\![0,n]\!]$, $P_k = X^k$.

D'après le cours, on sait que $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}(\psi(C))$.

Or pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\psi(P_k) = \displaystyle\int_0^x t^k\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k+1}\,P_{k+1}$

On en déduit que $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}(X, X^2, ..., X^{n+1})$.

3.3. On remarque tout d'abord que pour tout polynôme P, 0 est racine de $\psi(P)$ et $\psi(P) \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$.

Soit donc $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

On a immédiatement : $P \in \mathrm{Ker}\,(\varphi) \iff$ 1 est racine de $\psi(P)$.

Ainsi, si $\psi(P) \in \mathrm{Vect}(X(X-1), ..., X^n(X-1))$, alors 1 est racine de $\psi(P)$, et donc $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Réciproquement, si $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Alors 1 et 0 sont racines de $\psi(P)$, donc $\psi(P)$ est divisible par $X(X-1)$.

Comme $\psi(P) \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, on a $\psi(P) \in \mathrm{Vect}(X(X-1), ..., X^n(X-1))$.

Conclusion : $P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff \psi(P) \in \mathrm{Vect}(X(X-1), ..., X^n(X-1))$.

3.4. D'après la question précédente :

$P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff \psi(P) \in \mathrm{Vect}(X(X-1), ..., X^n(X-1)) \iff \exists (a_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ telle que $\psi(P) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\,X^k(X-1)$

Ainsi, si $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors $P = (\psi(P))' = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\,X^{k-1}((k+1)\,X - k) \in \mathrm{Vect}\left(X^{k-1}((k+1)\,X-k)\right)_{k\in[\![1,n]\!]}$.

Comme $\left(X^{k-1}((k+1)\,X-k)\right)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est échelonnée en degré, c'est une famille libre, et comme $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = n$, on en déduit que c'est une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

4. On note $\mathcal{H} = \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.

4.1. D'après le cours, $\dim(\mathcal{H}) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) \times \dim(\mathbb{R}) = n+1$.

4.2. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on appelle ψ_k la forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\dfrac{P^{(k)}(0)}{k\,!}$.

On remarque que pour $k \in [\![0,n]\!]$, on a : $\psi_k(P_k) = 1$ et $\psi_k(P_j) = 0$ pour tout $j \neq k$.

Soient alors $(b_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ une famille de scalaires tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k\,\psi_k = 0$ (forme linéaire nulle).

On applique à P_j, pour tout $j \in [\![0,n]\!]$ et il reste $b_j = 0$, ce qui prouve que la famille $(\psi_0, ..., \psi_n)$ est libre.

Comme elle est constituée de $n+1$ vecteurs dans un espace de dimension $n+1$, c'est une base de $\mathcal{H}$.

4.3. D'après la question précédente, il existe une unique famille $(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ de scalaires tels que : $\varphi = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\,\psi_k$.

Pour déterminer les a_k, il suffit d'évaluer en P_j et on obtient : $\varphi = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\,\psi_k$.

COMMENTAIRES

• Commentaires généraux

- Une première remarque importante : les correcteurs ont signalé à plusieurs reprises un nombre important de copies mal ordonnées, mal présentées (la rédaction de la copie ne doit pas occasionner un jeu de piste pour l'examinateur), **les étudiants doivent s'appliquer à présenter une copie claire et propre**.
- Il semble judicieux d'éviter d'utiliser des expressions telles que "il est trivial que ", " par une récurrence immédiate ", etc... rappelons que toute proposition énoncée dans une copie se doit d'être démontrée.
- Les quatre exercices constituant le sujet permettaient de parcourir les parties les plus classiques du programme de deuxième année de classe préparatoire MP.

Nous avons été déçus par le trop grand nombre d'étudiants qui ne maîtrisent pas les notions de base d'algèbre linéaire, d'analyse et qui espèrent venir à bout du sujet grâce à des recettes toutes faites.
Nous constatons aussi une grande maladresse dans les calculs (parfois très simples) qui sont très rapidement abandonnés.
- Enfin, notons une nouvelle fois que les examinateurs ne goûtent guère des arguments bidons ou fallacieux pour arriver à toute force au résultat annoncé dans l'énoncé.

1. De trop nombreux candidats n'arrivent pas à déterminer le nombre d'éléments de la famille $\mathscr{B}$ et ne connaissent pas la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$.

2.1. Sans problème.

2.2. Souvent la dimension du noyau est fausse. Certains candidats parlent d'hyperplan en oubliant que la forme linéaire doit être non nulle.

3.1. Rédaction souvent très approximative.

3.2. On remarque que la propriété $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\varphi(1), \varphi(X), ..., \varphi(X^n))$ est très peu connue de la majorité des candidats.

3.3. et **3.4.** très peu traités et souvent avec un grand manque de rigueur.

4.1. Même si la réponse à cette question est donnée dans la question suivante, le candidat se doit de donner une justification de tout ce qu'il écrit sur sa copie.

4.2. et **4.3.** Questions rarement traitées.