CCP MP MATHS 1, Mai 2012

Problème : Comparaison de convergences

Partie I

1. (a.)La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I si et seulement si la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ converge sur $\mathbb{R}_+$, où $\|f\|_\infty = \mathrm{Sup}\{|f(x)| / x \in I\}$, appelée norme de la convergence uniforme.
   (*pour que cette définition ait un sens, il faut que les fonctions soient bornées sur* I*, de manière à pouvoir parler de la norme infinie*)

   (b.) $\forall x \in I,\ 0 \leqslant |f_n(x)| \leqslant \|f_n\|_\infty$ et par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que si $\sum f_n$ converge normalement, alors pour tout x de I, la série $\sum |f_n(x)|$ converge, i.e. la série $\sum f_n$ converge absolument

2. Pour x dans I notons $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$. Alors $|R_n(x)| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$. La série $\sum f_n$ convergeant normalement, la suite $\left(\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty\right)_n$ converge vers 0 indépendamment de x, ce qui prouve que la suite des restes $(R_n(x))_n$ converge uniformément vers 0 sur I, i.e. la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

3. Pour x fixé dans $I = [0,1]$, $|f_n(x)| = \dfrac{x^2}{n} + \dfrac{1}{n}$ et donc la suite $(|f_n(x)|)_n$ décroît et converge vers 0. Le CSSA est applicable, ce qui prouve que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $I = [0,1]$.
   Le CSSA nous dit que, pour tout x de I, $|R_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| = \dfrac{x^2}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n}$.
   $\lim \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n} = 0$ donc la suite $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers 0, c'est à dire la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $I = [0,1]$.
   Enfin, pour x fixé, $|f_n(x)| = \dfrac{x^2}{n^2} + \dfrac{1}{n}$. La série $\sum \dfrac{x^2}{n^2}$ converge (série de Riemann) mais la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique), et donc la série $\sum |f_n(x)|$ diverge, i.e. la série $\sum f_n$ ne converge pas absolument sur I.

4. Considérons la fonction f_n définie sur $I = [0,1[$ par $f_n(x) = x^n$. Pour x dans I, la série $\sum |f_n(x)| = \sum x^n$ converge vers $\dfrac{1}{1-x}$. Cette série $\sum f_n$ converge absolument sur $I = [0,1[$.
   Alors $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} = \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$. Montrons que cette suite de fonctions $(R_n(x))$ ne converge pas uniformément vers 0. En effet $R_n(1-\dfrac{1}{n}) = n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} = ne^{(n+1)\ln(1-\frac{1}{n})} \sim \dfrac{n}{e}$ qui tend vers $+\infty$ avec n. Donc la suite (R_n) ne converge pas uniformément vers 0, et ainsi la série $\sum f_n$ est une série qui converge absolument sur $I = [0,1[$ mais qui ne converge pas uniformément sur I.

Partie II

5. La suite (α_n) décroît et est positive, donc $\forall n,\ 0 \leqslant \alpha_n \leqslant \alpha_0$. La suite $(\alpha_n)_n$ est donc bornée.
   Soit $x \in I$. La série $\sum x^n$ converge (série géométrique de raison x avec $0 \leqslant x < 1$) et donc la série $\sum \alpha_0(1-x)x^n$

converge (linéarité).
$\forall n \geqslant 1, \forall x \in I,\ 0 \leqslant \alpha_n x^n(1-x) \leqslant \alpha_0(1-x)x^n$. Ainsi, par comparaison de séries à termes positifs, on conclut que la série $\sum f_n$ converge simplement sur I.

6. (a.) $\forall x \in I,\ f_n'(x) = \alpha_n(nx^{n-1} - (n+1)x^n) = \alpha_n x^{n-1}(n - x(n+1))$. En construisant le tableau de variations de f_n on établit que la fonction f_n positive admet sur I un maximum (absolu) au point $\dfrac{n}{n+1}$ qui vaut $f_n(\dfrac{n}{n+1}) = \alpha_n \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$. Donc $\|f_n\|_\infty = \alpha_n \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$.

   (b.) $\|f_n\|_\infty = \dfrac{\alpha_n}{n}.\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$.
   Or $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e^{(n+1)\ln(1-\frac{1}{n+1})}$, et $(n+1)\ln(1-\frac{1}{n+1}) \sim (n+1)(-\frac{1}{n+1}) \sim -1$. Donc $\lim \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1} = e^{-1}$.
   Ainsi, $\|f_n\|_\infty \sim \dfrac{\alpha_n}{ne}$; de plus $\|f_n\| \geqslant 0$ et donc, par comparaison de séries positives,
   $\boxed{\sum \|f_n\|_\infty \text{ converge } \iff \sum \dfrac{\alpha_n}{n} \text{ converge.}}$

7. (a.) $\boxed{\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}.}$

   (b.) On sait que la suite (α_n) décroît. Donc pour $k \geqslant n+1,\ \alpha_k \leqslant \alpha_{n+1}$.
   Alors $\forall k \geqslant n+1,\ \alpha_k x^k(1-x) \leqslant \alpha_{n+1}(1-x)x^k$, et donc par inégalités sur les séries convergentes,
   $$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k(1-x) \leqslant \alpha_{n+1}(1-x)\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \alpha_{n+1}(1-x)\frac{x^{n+1}}{1-x} = \alpha_{n+1}x^{n+1} \leqslant \alpha_{n+1}.$$
   La suite des restes $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k(1-x)$ est donc positive et majorée par une suite qui ne dépend pas de x et qui converge vers 0 , ce qui prouve que la série $\sum f_n$ converge uniformément.

   (c.) La suite (α_n) décroît et est minorée par 0, donc elle converge vers une limite positive ou nulle. Si cette limite ℓ est non nulle, alors pour tout n, $\alpha_n \geqslant \ell > 0$.
   Dans ces conditions pour tout x dans I, $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k(1-x) \geqslant \ell(1-x)\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = \ell x^{n+1}$.
   Mais alors, $R_n(1+\frac{1}{n+1}) \geqslant \ell(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}$ qui converge vers $\dfrac{\ell}{e}$ (voir question 6.a.)donc ne converge pas vers 0, c'est à dire que la suite des restes ne converge pas uniformément vers la fonction nulle, ce qui contredit l'hypothèse.
   Donc $\sum f_n$ converge uniformément sur I, si et seulement si la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

8. (a.) Avec $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$, la question 6.b. montre que la série $\sum f_n$ converge normalement (car $\dfrac{\alpha_n}{n} = \dfrac{1}{n^2}$ et la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge)

   (b.) Il suffit de prendre $\alpha_n = 1$: la suite est constante, donc elle décroît (au sens large), et elle ne converge pas vers 0. Si on veut absolument une suite strictement décroissante, il suffit de prendre $\alpha_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}$

   (c.) Il nous faut trouver une suite $(\alpha_n)_n$ positive décroissante, convergeant vers 0, mais telle que la série $\sum \dfrac{\alpha_n}{n}$ diverge .

La suite définie par $\alpha_n = \dfrac{1}{\ln(n)}$ pour $n \geqslant 2$ et $\alpha_1 = \alpha_2$ convient (elle est bien définie pour $n \geqslant 1$). Cette suite est décroissante et converge vers 0. Il reste à montrer que la série $\sum \dfrac{\alpha_n}{n}$ diverge.

La fonction $g : x \to \dfrac{2}{x\ln(x)}$ décroît sur $[2, +\infty[$ et est positive. La série $\sum\limits_{n\geqslant 2} g(n)$ est donc de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{\infty} g(x)dx$. Or $\displaystyle\int_1^M g(x)dx = \int_1^M \frac{1}{x\ln(x)}dx = [\ln(\ln x)]_2^M = \ln(\ln M) - \ln(\ln 2)$ qui a pour limite $+\infty$ quand M tend vers $+\infty$. L'intégrale diverge, donc la série $\sum \dfrac{\alpha_n}{n}$ diverge, et donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur I mais ne converge pas normalement sur I.

9. CV Normale $\Rightarrow$ CV Absolue $\Rightarrow$ CV simple ($\mathbb{R}$ est complet)
CV Normale $\Rightarrow$ CV Uniforme $\Rightarrow$ CV simple.
Aucune des réciproques n'est vraie. Et de plus :
CV absolue $\not\Rightarrow$ CV uniforme, et de même : CV uniforme $\not\Rightarrow$ CV absolue

Gilbert Roux, MP Evry