Programme de colle – MP 1

Convexité

Extrait du programme officiel :

L'objectif de ce chapitre est double :

- *introduire brièvement la notion de partie convexe d'un espace vectoriel réel ;*
- *étudier les fonctions convexes d'une variable réelle.*

Le cours gagne à être illustré par de nombreuses figures.
La notion de barycentre est introduite exclusivement en vue de l'étude de la convexité.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Parties convexes d'un espace vectoriel réel	
Barycentre. Partie convexe. Caractérisation à l'aide de barycentres à coefficients positifs.	⇆ PC et SI : centre de masse (ou centre de gravité).
b) Fonctions convexes d'une variable réelle	
Une fonction f est convexe sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ si pour tout (x,y) de I^2 et tout λ de $[0,1]$: $$f((1-\lambda)x+\lambda y)\leqslant(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y).$$	Pour f convexe, les étudiants doivent connaître l'inégalité $$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$$ où $x_1,\dots,x_n$ sont des points de I et $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ des réels positifs de somme 1.
Caractérisations : convexité de l'épigraphe, inégalité des pentes. Fonction concave.	Position relative du graphe et de ses cordes.
c) Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables	
Caractérisation des fonctions convexes dérivables sur I, des fonctions convexes deux fois dérivables sur I. Position relative du graphe d'une fonction convexe dérivable et de ses tangentes.	Exemples d'inégalités de convexité.

Intégration sur un segment

Révision du programme de MPSI : calculs de primitives, intégrales sur un segment des fonctions numériques. Voir programme officiel page suivante.

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour le moment.

Contenus	Capacités & commentaires
Intégration sur un segment	
Intégrale d'une fonction f continue par morceaux sur un segment de $\mathbb{R}$, ~~à valeurs dans E.~~	~~Définie par les intégrales des coordonnées dans une base.~~ Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. ⇆ PC et SI : intégration d'un champ de vecteurs en mécanique et électromagnétisme.
Linéarité de l'intégrale. Relation de Chasles. Inégalité $\left\lvert\int_a^b f\right\rvert\leqslant\int_a^b\lvert f\rvert$.	
Sommes de Riemann associées à une subdivision régulière.	Extension de l'énoncé relatif aux fonctions numériques étudié en MPSI.
Intégrale fonction de sa borne supérieure	
Dérivation de $x\mapsto\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue.	Ce paragraphe fournit l'occasion de revoir les résultats correspondants pour les fonctions numériques et les techniques de calcul de primitives.
Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	
Formules de Taylor	
Formule de Taylor avec reste intégral. Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathscr{C}^n$. Formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathscr{C}^n$.	Les étudiants doivent connaître la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales (reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange).

L'inégalité de Cauchy-Schwarz (intégrale sur un segment) est revue à cette occasion.

Semaine prochaine : Régularité des suites et séries de fonctions. Intégrales généralisées.

Questions de cours :

(i) Caractérisations de la convexité d'une fonction. Démonstration au choix du colleur.

(ii) Inégalité de Jensen (discrète).

(iii) Convergence des sommes de Riemann dans le cas où la fonction est continue sur le segment $[a,b]$, avec une subdivision quelconque. Cas d'une fonction lipschitzienne.

(iv) Énoncé des formules de Taylor, idées des preuves (on ne demande pas le détail).
$\forall z\in\mathbb{C},\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=\mathrm{e}^z$ (avec preuve détaillée).
(l'exponentielle complexe étant définie comme en première année à l'aide de l'exponentielle réelle, du cosinus et du sinus.)

(v) Un calcul de primitive de la forme $\dfrac{ax+b}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ avec $\beta^2<4\alpha\gamma$ au choix du colleur.

(vi) Intégrales de Wallis $\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,\mathrm{d}t$: relation de récurrence, expression, équivalent.

(vii) **CCINP 56** : On considère la fonction H définie sur $]1,+\infty[$ par $H(x)=\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

  (a) Montrer que H est C^1 sur $]1,+\infty[$ et calculer sa dérivée.

  (b) Montrer que la fonction u définie par $u(x)=\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}$ admet une limite finie en $x=1$.

  (c) En utilisant la fonction u de la question 2., calculer la limite en 1^+ de la fonction H.

Programme de MPSI

Calcul de primitives

Contenus	Capacités & commentaires
Calcul de primitives	
Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes.	Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. Les étudiants doivent savoir utiliser les primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ pour calculer celles de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$. ⇆ PC et SI : cinématique.
Primitives des fonctions puissances, trigonométriques et hyperboliques, exponentielle, logarithme, $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}\,,\ \ x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$	Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées.
Dérivée de $x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,t$ où f est continue.	Résultat admis à ce stade.
Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives. Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive.	
Intégration par parties pour des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Changement de variable : si φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et si f est continue sur $\varphi(I)$, alors pour tous a et b dans I $\displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,x = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,t.$	On définit à cette occasion la classe $\mathscr{C}^1$. Application au calcul de primitives.

Intégrale sur un segment

Contenus	Capacités & commentaires
a) Continuité uniforme	
Continuité uniforme.	
Théorème de Heine.	La démonstration n'est pas exigible.
b) Fonctions continues par morceaux	
Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision. Fonction en escalier.	
Fonction continue par morceaux sur un segment, sur un intervalle.	Une fonction est continue par morceaux sur un intervalle I si sa restriction à tout segment inclus dans I est continue par morceaux.
c) Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment	
Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.	Le programme n'impose pas de construction particulière. Interprétation géométrique. ⇆ PC et SI : valeur moyenne. Aucune difficulté théorique relative à la notion d'aire ne doit être soulevée. Notations $\displaystyle\int_{[a,b]} f,\ \int_a^b f,\ \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$
Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale.	Les étudiants doivent savoir majorer et minorer des intégrales.
Inégalité : $\displaystyle\left\lvert\int_{[a,b]} f\right\rvert \leqslant \int_{[a,b]} \lvert f\rvert.$	
Relation de Chasles.	Extension de la notation $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ au cas où $b \leqslant a$. Propriétés correspondantes.
L'intégrale sur un segment d'une fonction continue de signe constant est nulle si et seulement si la fonction est nulle.	
d) Sommes de Riemann	
Si f est une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,t.$	Interprétation géométrique. Démonstration dans le cas où f est de classe $\mathscr{C}^1$. ⇆ I : méthodes des rectangles, des trapèzes.
e) Intégrale fonction de sa borne supérieure	
Dérivation de $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,t$ pour f continue. Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive. Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives. Intégration par parties, changement de variable.	
f) Calcul de primitives	
Primitives usuelles.	Sont exigibles les seules primitives mentionnées dans le chapitre « Techniques fondamentales de calcul en analyse ».
Calcul de primitives par intégration par parties, par changement de variable. Utilisation de la décomposition en éléments simples pour calculer les primitives d'une fraction rationnelle.	On évitera tout excès de technicité.
g) Formules de Taylor	
Pour une fonction f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, formule de Taylor avec reste intégral au point a à l'ordre n.	
Inégalité de Taylor-Lagrange pour une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$.	L'égalité de Taylor-Lagrange est hors programme. On soulignera la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales (reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange).