Programme de colle – MP 1

Réduction (suite)

Reprise du programme précédent pour exercices auquel s'ajoute :

Contenus	Capacités & commentaires
e) Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.	Interprétation géométrique.
Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure. Pour qu'une matrice carrée soit trigonalisable, il faut et il suffit que l'endomorphisme canoniquement associé le soit.	La pratique de la trigonalisation n'est pas un objectif du programme. On se limite au cas $n=2$ et à des cas particuliers simples pour $n=3$.
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.	Traduction matricielle. Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable à l'aide des valeurs propres. $\leftrightarrows$ I : recherche de la valeur propre de plus grand module à l'aide du quotient des traces de deux itérées successives.
f) Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes	
Endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension finie, matrice nilpotente. Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0. L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E.	

Le théorème de Cayley-Hamilton est énoncé, non démontré, mais aucune notion de réduction concernant les polynômes annulateur n'est au programme cette semaine.

Dérivation des fonctions numériques et applications

Révisions du programme de 1re année. Voir page suivante.

Semaine prochaine : Intégration su un segment (révisions), convexité.

Questions de cours :

(i) Les sous-espaces propres sont en somme directe.

(ii) Si deux endomorphismes commutent, l'image, le noyau et plus généralement les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.

(iii) Définitions, caractérisations (5 pour les endomorphismes + 2 pour les matrices) et conditions suffisantes (2) de la diagonalisabilité d'un endomorphisme ou d'une matrice. Démonstrationůs choisieůs par le colleur.

(iv) $\chi_A = X^n - (\operatorname{tr} A)X + \cdots + (-1)^n \det A$. Si χ_A est scindé, expression de $\operatorname{tr} A$ et $\det A$ à l'aide des valeurs propres de A.

(v) Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

(vi) Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0. L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E.

(vii) **CCINP 70** : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

(a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?

(b) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = a\mathrm{I}_3 + bA + cA^2$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.
Déduire de la question **1.** les éléments propres de B.

(viii) **CCINP 73** : On pose $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix}$.

(a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

(b) Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$.
En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}\,(I_2, A)$.

(ix) **CCINP 63** : Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels $A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots\\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1\\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

Pour $n \geqslant 1$, on désigne par D_n le déterminant de A_n.

(a) Démontrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.

(b) Déterminer D_n en fonction de n.

(c) Justifier que la matrice A_n est diagonalisable. Le réel 0 est-il valeur propre de A_n ?

(x) **CCINP 3** :

(a) On pose $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.

(b) On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.
En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.

(c) Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

(xi) **CCINP 4** :

(a) Énoncer le théorème des accroissements finis.

(b) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a,b[$. On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et que f est dérivable sur $]a,x_0[$ et sur $]x_0,b[$.
Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.

(c) Prouver que l'implication : $(f$ est dérivable en $x_0) \Longrightarrow (f'$ admet une limite finie en $x_0)$ est fausse.
Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

Programme de MPSI

Contenus	Capacités & commentaires
a) Nombre dérivé, fonction dérivée	
Dérivabilité en un point, nombre dérivé.	Développement limité à l'ordre 1. Interprétation géométrique. ⇆ SI : identification d'un modèle de comportement au voisinage d'un point de fonctionnement. ⇆ SI : représentation graphique de la fonction sinus cardinal au voisinage de 0. ⇆ I : méthode de Newton.
La dérivabilité entraîne la continuité. Dérivabilité à gauche, à droite. Dérivabilité et dérivée sur un intervalle.	
Opérations sur les fonctions dérivables et les dérivées : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.	Tangente au graphe d'une réciproque.
b) Extremum local et point critique	
Extremum local.	
Condition nécessaire en un point intérieur.	Un point critique est un zéro de la dérivée.

c) Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Contenus	Capacités & commentaires
Théorème de Rolle.	Utilisation pour établir l'existence de zéros d'une fonction.
Égalité des accroissements finis.	Interprétations géométrique et cinématique.
Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si $\lvert f'\rvert$ est majorée par K, alors f est K-lipschitzienne.	La notion de fonction lipschitzienne est introduite à cette occasion. Application à l'étude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle.	
Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f'(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$.	Interprétation géométrique. Si $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et f' est continue en a.

d) Fonctions de classe C^k

Contenus	Capacités & commentaires
Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, fonction de classe $\mathscr{C}^k$.	
Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$: combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.	Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.
Théorème de classe $\mathscr{C}^k$ par prolongement : si f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I \setminus \{a\}$ et si $f^{(i)}(x)$ possède une limite finie lorsque x tend vers a pour tout $i \in \{0, \dots, k\}$, alors f admet un prolongement de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.	

e) Fonctions complexes

Contenus	Capacités & commentaires
Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire.
Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	Le résultat, admis à ce stade, sera justifié dans le chapitre « Intégration ».