Programme de colle – MP 1

Réduction (1ère partie)

Extrait du programme officiel. *On se limite en pratique au cas où le corps de base $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Matrices semblables, interprétation géométrique.	Les étudiants doivent savoir utiliser l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée.
Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit.	En dimension finie, traduction de la stabilité d'un sous-espace F par un endomorphisme u à l'aide de la matrice de u dans une base adaptée à F.
b) Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée	
Droite stable par un endomorphisme. Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre. Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie est l'ensemble de ses valeurs propres.	⇆ SI : matrice d'inductance : inductance cyclique et inductance homopolaire. La notion de valeur spectrale est hors programme.
La somme d'une famille finie de sous-espaces propres est directe.	Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie n est fini, et de cardinal au plus n. Si deux endomorphismes u et v commutent, tout sous-espace propre de u est stable par v.	
Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres et spectre d'une matrice carrée.	Équation aux éléments propres $MX = \lambda X$. Deux matrices semblables ont même spectre. Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}'$ et si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, le spectre de M dans $\mathbb{K}$ est contenu dans le spectre de M dans $\mathbb{K}'$.
c) Polynôme caractéristique	
Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.	Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. Le polynôme caractéristique est unitaire. Notations χ_u, χ_A. Les étudiants doivent connaître les valeurs des coefficients de degrés 0 et $n-1$.
Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres. Multiplicité d'une valeur propre. Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit.	La dimension du sous-espace propre associé à λ est majorée par la multiplicité de λ.
d) Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.	Une telle base est constituée de vecteurs propres.
Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme de ses sous-espaces propres soit égale à E. Une matrice carrée est dite diagonalisable si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé est diagonalisable.	Cas des projecteurs, des symétries.
Pour qu'une matrice carrée soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'elle soit semblable à une matrice diagonale.	Dans la pratique des cas numériques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$.
Cas d'un endomorphisme d'un espace de dimension n admettant n valeurs propres distinctes.	Traduction matricielle.
Pour qu'un endomorphisme u soit diagonalisable, il faut et il suffit que χ_u soit scindé et que, pour toute valeur propre de u, la dimension de l'espace propre associé soit égale à sa multiplicité.	Traduction matricielle.

Le théorème de Cayley-Hamilton est énoncé, non démontré, mais aucune notion de réduction concernant les polynômes annulateur, ni de trigonalisation n'est au programme cette semaine.

Questions de cours :

(i) Déterminant triangulaire par blocs (en utilisant le fait que les formes n-linéaires alternées en dimension n forment un espace de dimension 1).

(ii) Les sous-espaces propres sont en somme directe.

(iii) Si deux endomorphismes commutent, l'image, le noyau et plus généralement les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.

(iv) Définitions, caractérisations (5 pour les endomorphismes + 2 pour les matrices) et conditions suffisantes (2) de la diagonalisabilité d'un endomorphisme ou d'une matrice. Démonstration·s choisie·s par le colleur.

(v) CNS sur la représentation par bloc d'un endomorphisme dans une base adaptée pour qu'un sous-espace soit stable.
Polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit sur un sous-espace stable.
Pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est entre 1 et la multiplicité de la valeur propre.

(vi) Polynôme caractéristique : degré, cœfficients de degré n, $n-1$ et 0.

(vii) **CCINP 83** : Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

(a) Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est valeur propre de $v \circ u$.

(b) On considère, sur $E = \mathbb{R}[X]$ les endomorphismes u et v définis par $u : P \longmapsto \int_1^X P$ et $v : P \longmapsto P'$.
Déterminer $\text{Ker}(u \circ v)$ et $\text{Ker}(v \circ u)$. Le résultat de la question 1. reste-t-il vrai pour $\lambda = 0$?

(c) Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda = 0$.
Indication : penser à utiliser le déterminant.

(viii) **CCINP 72** : Soit n un entier naturel non nul.
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, et soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné de E.

(a) Donner le rang de f.

(b) f est-il diagonalisable ? (discuter en fonction du vecteur v)

(ix) **CCINP 67** : Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels.
M est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? M est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$?

(x) **CCINP 59** : Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n.
On pose : $\forall P \in E, f(P) = P - P'$.

(a) Démontrer que f est bijectif de deux manières :

i. sans utiliser de matrice de f,

ii. en utilisant une matrice de f.

(b) Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

(c) f est-il diagonalisable ?

(xi) **CCINP 69** : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

(a) Déterminer le rang de A.

(b) Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle diagonalisable ?