CHAPITRE XIII

Régularité des suites et séries de fonctions

Extrait du programme officiel :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Intégration d'une limite uniforme sur un segment	
Soit (u_n) une suite de fonctions continues définies sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans F, a un point de I. On suppose que (u_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction u. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$ soit $$U_n(x) = \int_a^x u_n, \quad U(x) = \int_a^x u.$$ Alors (U_n) converge uniformément vers U sur tout segment de I.	En particulier, si (u_n) converge uniformément vers u sur le segment S, alors : $$\int_S u_n \to \int_S u.$$
Dérivation d'une suite de fonctions	
Soit (u_n) une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans F. Si (u_n) converge simplement sur I vers une fonction u, et si (u_n') converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction v, alors (u_n) converge uniformément vers u sur tout segment de I, u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $u' = v$.	Extension aux suites de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, sous l'hypothèse de convergence simple de $(u_n^{(j)})$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et de convergence uniforme de $(u_n^{(k)})$ sur tout segment de I.
Séries de fonctions	
Adaptation au cas des séries de fonctions des résultats des paragraphes ci-dessus. Les étudiants doivent savoir étudier la somme d'une série de fonctions (régularité, étude asymptotique, utilisation de la comparaison série-intégrale).	

TABLE DES MATIÈRES

RÉGULARITÉ DES SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points, X une partie non vide $\mathbb{R}$.

I SUITES DE FONCTIONS

1 Intégration sur un segment

Théorème : Interversion limite et intégrale

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^{[a,b]}$ tel que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$*

H2 *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$*

alors

C1 *f est continue sur $[a,b]$*

C2 $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

Démonstration

On suppose $a \leqslant b$ quitte à multiplier par -1.
$\left|\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\,\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$ □

Méthode : Pour montrer qu'on n'a pas uniforme continuité...

Il suffit qu'on n'ait pas $\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème : Convergence uniforme de primitive

Soient $f : I \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$, $a \in I$. On suppose que

- **H1** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I.*
- **H2** *La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I.*

Alors on pose $F_n : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ l'unique primitive de f_n qui s'annule en a et

- **C1** *f est continue sur I donc $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ unique primitive de f qui s'annule en a existe bien,*
- **C2** *$(F_n)_n$ converge uniformément vers F sur tout segment de I.*

Démonstration

Sur un segment $[b,c]$ de I, on note $m = \min(a,b,c)$ et $M = \max(a,b,c)$. On calcule

$$|g_n(x) - g(x)| \leqslant |x-a|\,\|f_n - f\|_{\infty,[a,x]} \leqslant (M-m)\,\|f_n - f\|_{\infty,[m,M]} \to 0$$

d'où la conclusion. □

Remarque

En fait, le premier théorème est une conséquence du second, en prenant $I = [a,b]$, on obtient bien $g_n(b) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(b)$.

2 Dérivation

Théorème : Interversion limite et dérivée

Soient $f : I \to \mathbb{K}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$. On suppose que

- **H1** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.*
- **H2** *La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur I.*
- **H3** *La suite $(f_n')_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction h.*

Alors

- **C1** *f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.*
- **C2** *$f' = h$ c'est-à-dire $(\lim f_n)' = \lim f_n'$.*
- **C3** *$(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I.*

Remarque

Vrai avec l'hypothèse plus faible de dérivabilité des f_n, mais hors-programme.

Démonstration

- Le théorème de transfert de continuité nous donne déjà la continuité de g sur I (avec **H1** et **H3**).
- Soit $a \in I$. On pose $g_n : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t = f_n(x) - f_n(a)$ et $g : x \mapsto \displaystyle\int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t$. D'après le théorème précédent, (g_n) converge uniformément vers g sur tout segment de I, donc en particulier converge simplement vers g.

Or pour tout $x \in I$, $g_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) - f(a)$, donc par unicité de la limite, pour tout $x \in I$, $f(x) = f(a) + \int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t$ et ainsi f est de classe $\mathscr{C}^1$ et de dérivée h.

- Si S segment de I, $x \in S$,

$$|f_n(x) - f(x)| = |g_n(x) + g_n(a) - g(x) - g(a)| \leqslant |g_n(x) - g(x)| + |f_n(a) - f(a)| \leqslant \|g_n - g\|_{\infty,S} + |f_n(a) - f(a)|$$

qui est indépendant de x et converge vers 0. Donc $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I. □

Théorème : Généralisation à la classe $\mathscr{C}^k$

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$, $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.*

H2 *Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, la suite $\left(f_n^{(k)}\right)_n$ converge simplement vers une fonction h_k sur I.*

H3 *La suite $\left(f_n^{(p)}\right)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction h_p.*

Alors

C1 *$f = h_0$ est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.*

C2 *Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $f^{(k)} = h_k$ c'est-à-dire $(\lim f_n)^{(k)} = \lim f_n^{(k)}$.*

C3 *Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $\left(f_n^{(k)}\right)_n$ converge uniformément vers h_k sur tout segment de I.*

Démonstration

On applique le théorème précédent à toutes les dérivées successives, de la n° p à la n° 1. □

II Séries de fonctions

Les théorèmes sur les séries de fonctions se déduisent directement des théorèmes sur les suites de fonctions en les appliquant aux suites de sommes partielles.

1 Intégration sur un segment

Théorème : Interversion série-intégrale sur un segment

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^{[a,b]}$ tel que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$*

alors

C1 *$f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[a,b]$.*

C2 *$\sum \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge.*

C3 $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t.$

Exercice : CCINP 14

1. Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$.
   Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles.
   Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors la suite $\left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.
3. Démontrer que $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Corrigé

La série $\sum x^n$ converge normalement et donc uniformément sur le segment $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \longmapsto x^n$ est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

On en déduit alors que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{2^n}$.

Exercice

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$, $f_n(x) = (-1)^n x^n (1-x)^2$.

Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,1]$ puis déterminer $f = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

En déduire la valeur de $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

Réponse : $2\ln 2 - \frac{5}{4}$.

2 Primitive

Théorème : Interversion série et primitive

Soient $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$, $a \in I$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I.*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers $f = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur tout segment de I.*

Alors on pose $F_n : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ l'unique primitive de f_n qui s'annule en a et

C1 *f est continue sur I donc $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ unique primitive de f qui s'annule en a existe bien,*

C2 *La série de fonctions $\sum F_n$ converge uniformément sur tout segment de I et $F = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} F_n$.*

3 Classe $\mathscr{C}^p$

Théorème : Classe $\mathscr{C}^p$ d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$, $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.*

H2 *Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge simplement sur I.*

H3 *La série de fonctions $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I.*

Alors

C1 *$f = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^p$ sur I.*

C2 *Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $f^{(k)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$.*

C3 *Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I.*

Théorème : Classe $\mathscr{C}^\infty$ d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction de $\mathbb{K}^I$. On suppose que

H1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.*

H2 *La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I.*

H3 *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série de fonctions $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I.*

Alors

C1 $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.*

C2 *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$.*

Exercice

Montrer que $\zeta : x \in]1,+\infty[\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$, donner une expression de ses dérivées sous forme de somme, étudier la convexité de ζ.

Exercice : CCINP 16

On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\quad u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}.$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right]$.

1. Démontrer que S est dérivable sur $[0,1]$.
2. Calculer $S'(1)$.

Corrigé

1. Soit $x \in [0,1]$.
   Si $x = 0$, $u_n(0) = 0$ et donc $\sum u_n(0)$ converge.
   Si $x \neq 0$, comme au voisinage de $+\infty$, $u_n(x) = -\frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, alors $|u_n(x)| \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^2}{2n^2}$.
   Or $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge donc, par critère de comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n(x)$ converge absolument, donc converge.
   On en déduit que la série des fonctions u_n converge simplement sur $[0,1]$.

   La fonction S est donc définie sur $[0,1]$.
   $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, u_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et $\forall\, x \in [0,1]$, $u_n'(x) = \frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} = \frac{-x}{n(x+n)}$.

   Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in [0,1]$, $|u_n'(x)| \leqslant \frac{1}{n^2}$.

   On en déduit que $\|u_n'\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |u_n'(x)| \leqslant \frac{1}{n^2}$.

   Or $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

   Donc $\sum_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement, donc uniformément sur $[0,1]$.
   On peut alors affirmer que la fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$. Elle est donc dérivable sur $[0,1]$.

   Et on a : $\forall\, x \in [0;1]$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x)$.
2. En vertu de ce qui précède, $S'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$.

   Or $\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{N+1} - 1 \xrightarrow[N\to+\infty]{} -1$.
   Donc $S'(1) = -1$.

Exercice

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

Montrer que $\sum f_n$ converge simplement vers f de classe $\mathscr{C}^1$. Calculer f' et étudier les variations de f.