CHAPITRE XII

Convexité

Dans ce chapitre, le plus important, ce sont les dessins !

I Barycentres et parties convexes d'un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel réel.

1 Barycentre

Définition : Barycentre

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$.

On appelle **barycentre** de $\left((x_1, \lambda_1), \dots, (x_n, \lambda_n)\right)$, l'élément g de E défini par

$$g = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

On note $g = \operatorname{Bar}\left((x_1, \lambda_1), \dots, (x_n, \lambda_n)\right)$.

Propriété : Associativité du barycentre

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$ et $(y_1, \dots, y_p) \in E^p$, $(\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\mu = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \neq 0$. On suppose en outre que $\lambda + \mu \neq 0$ et on pose

- $x = \operatorname{Bar}\left((x_1, \lambda_1), \dots, (x_n, \lambda_n)\right)$,
- $y = \operatorname{Bar}\left((y_1, \mu_1), \dots, (y_p, \mu_p)\right)$,
- $g = \operatorname{Bar}\left((x_1, \lambda_1), \dots, (x_n, \lambda_n), (y_1, \mu_1), \dots, (y_p, \mu_p)\right)$.

Alors

$$g = \operatorname{Bar}\left((x, \lambda), (y, \mu)\right).$$

2 Parties convexes

Définition : Segment

Si a et b sont deux éléments de E, on définit le segment $[a, b]$

$$[a, b] = \left\{(1-t)a + tb \ ; \ t \in [0, 1]\right\}$$

Définition : Partie convexe

On dit qu'une partie C de E est convexe lorsque, pour tout couple (a, b) d'éléments de C, le segment $[a, b]$ est inclus dans C, c'est-à-dire lorsque

$$\forall (a, b) \in C^2, \quad \forall t \in [0, 1], \quad (1-t)a + tb \in C$$

Propriété : Caractérisation par les barycentres

C est convexe si et seulement si elle est stable par barycentre à cœfficients positifs, autrement dit si et seulement si pour tout $n \geqslant 1$, pour tout n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de réels vérifiant $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_2 \geqslant 0, \dots, \lambda_n \geqslant 0$ et $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$, et pour tout n-uplet $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ d'éléments de C, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in C$.

II Fonctions convexes d'une variable réelle

I désigne un intervalle réel contenant au moins deux points.

1 Définitions

Définition : Fonction convexe, concave

- $f : I \to \mathbb{R}$ est dite **convexe** sur I lorsque
$$\forall x, y \in I, \quad \forall t \in [0, 1], \quad f\left((1-t)x + ty\right) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y)$$
- f est dite **concave** sur I lorsque $-f$ est convexe.

La définition donne immédiatement l'interprétation géométrique suivante :

Propriété : Caractérisation par interprétation géométrique

f est convexe (respectivement concave) si et seulement si tout sous-arc de sa courbe est situé en dessous (respectivement au-dessus) de la corde correspondante.

Définition : Épigraphe

La partie $\mathscr{E}(f)$ du plan située au dessus (au sens large) de la courbe de f s'appelle son **épigraphe**.

$$(x, y) \in \mathscr{E}(f) \iff y \geqslant f(x)$$

2 Caractérisations

Ces caractérisations sont à visualiser sur des dessins !

Propriété : Caractérisation avec l'épigraphe

f est convexe sur I si et seulement si son épigraphe $\mathscr{E}(f)$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

Propriété : Caractérisations avec les pentes des cordes

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est convexe sur I.

*(ii) **Inégalité des trois cordes** : si $x, y, z \in I$, $x < y < z$,*

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

*(iii) **Croissance des pentes** : pour tout $a \in I$,*

$$\tau_a : \left| \begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array} \right. \quad \text{est croissante}$$

3 Cas des fonctions dérivables

Propriété : Caractérisation avec la dérivée

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I.

f est convexe si et seulement si f' est croissante sur I

Corollaire : Caractérisation avec la dérivée seconde

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I.

f est convexe (respectivement concave) si et seulement si $f'' \geqslant 0$ (respectivement $f'' \leqslant 0$) sur I.

Propriété : Caractérisation avec les tangentes

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I.

f est convexe (respectivement concave) si et seulement si son graphe est au-dessus (respectivement au dessous) de toutes ses tangentes.

III INÉGALITÉS DE CONVEXITÉ

Propriété : Inégalité de Jensen

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $n \geqslant 1$, $(x_1,\dots,x_n) \in I^n$, $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in [0,1]^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

- *Si f est convexe, $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.*

  En particulier, $f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$.
- *Si f est concave, $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.*

  En particulier, $f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$.

Exemples : Très classiques

E 1 – **Inégalité arithmético-géométrique** : pour tout $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}_*^+$, $\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} \leqslant \frac{x_1+\dots+x_n}{n}$.

E 2 – $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$. $\qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geqslant 1+x$.

E 3 – $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$.

IV QUE FAUT-IL SAVOIR FAIRE ?

- Savoir démontrer qu'une fonction dérivable ou deux fois dérivable est convexe.
- Reconnaître une inégalité de convexité, sous forme de somme ou de produit (et donc d'abord écrire l'inégalité « générique », avec les $1/n$ (surtout) ou avec les λ_i (un peu quand même).)
- Savoir traduire par une inégalité le fait que le graphe d'une fonction convexe est en-dessus de ses tangentes.
- Savoir que $\ln(1+x) \leqslant x$ si $x \geqslant -1$.
- Savoir passer de la « convexité pour 2 » à la « convexité pour n ».
- Savoir dessiner une fonction convexe...