CHAPITRE XI

# Dérivation et intégration sur un segment des fonctions numériques (MPSI)

Dans tout le chapitre, $I$ désigne un intervalle réel contenant au moins deux points, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## I DÉRIVABILITÉ

### 1 Nombre dérivé et fonction dérivée

#### a Dérivabilité en un point, sur un intervalle

**Définition**

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $a \in I$. On dit que $f$ **est dérivable en** $a$ si et seulement si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite lorsque $x \to a$ si et seulement si $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite lorsque $h \to 0$.

Cette limite est alors notée $f'(a)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ et appelée **nombre dérivé de** $f$ **en** $a$.

Lorsqu'elle existe, on a donc

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

$f$ est dérivable sur $I$ si et seulement si $f$ est dérivable en tout point de $I$.

On définit alors la fonction dérivée

$$f' = \mathrm{D}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array} \right. .$$

**Propriété : DL$_1$**

*$f$ est dérivable en $a$ si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en $a$, c'est-à-dire si on peut écrire*

$$f(a+h) = f(a) + hb + h\cdot\varepsilon(h) = f(a) + hb + \mathrm{o}(h)$$

*où $b \in \mathbb{K}$ et $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$.*

*Dans ce cas, $b = f'(a)$.*

**Corollaire : dérivable $\Longrightarrow$ continue**

*Si $f$ est dérivable en $a$, alors $f$ est continue en $a$.*
*La réciproque est fausse.*

#### b Dérivabilité à gauche, à droite

**Définition**

Si $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$. $f$ est dite **dérivable à gauche** (respectivement **à droite**) de $a$ lorsque $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite à gauche (respectivement à droite) de $a$, notée $f'_g(a)$ (respectivement $f'_d(a)$).

**Propriété**

*Si $a \in \overset{\circ}{I}$, $f$ est dérivable en $a$ si et seulement si $f$ est dérivable à gauche et à droite de $a$ et $f'_g(a) = f'_d(a)$.*
*On a alors $f'_g(a) = f'_d(a) = f'(a)$*

#### c Opérations algébriques

**Propriété**

*Si $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$, $\lambda \in \mathbb{R}$*

*(i) $f+g$ dérivable en $a$ et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.*

*(ii) $f \times g$ dérivable en $a$ et*

$$(f\times g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

*(iii) $\lambda f$ dérivable en $a$ et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.*

*(iv) Si $g$ ne s'annule pas, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en $a$ et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

**Propriété**

*Soient $I, J$ des intervalles, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$ et $a \in I$.*
*Si $f$ est dérivable en $a$ et $g$ est dérivable en $b = f(a)$, alors $g\circ f$ est dérivable en $a$ et*

$$(g\circ f)'(a) = f'(a) \times g'\circ f(a).$$

#### d Dérivée d'une réciproque

**Propriété**

*Si $f : I \to J$ bijective et dérivable sur $I$, alors $f^{-1}$ est dérivable sur $\left\{f(x)\ ;\ x\in I \text{ et } f'(x) \neq 0\right\}$ et*

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'\circ f^{-1}}$$

# II Dérivées successives et classe d'une fonction

## 1 Définition

**Définition**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

- Lorsque $f$ est dérivable $n$ fois, note $f^{(n)}$ sa dérivée $n^e$ tel que $f^{(0)} = f$ et pour tout $k$, $f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$.
- Si $k \in \mathbb{N}$, $f$ est **de classe $\mathscr{C}^k$ sur** $I$ lorsque $f$ est $k$ fois dérivable et $f^{(k)}$ est continue sur $I$. On note $\mathscr{C}^k(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I$.
- $f$ est **de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur** $I$ lorsque $f$ est de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire lorsque $f$ est indéfiniment dérivable.

**Propriété**

*Si $n \geqslant 1$, $f$ est $n$ fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) si et seulement si $f$ dérivable et $f'$ est $n-1$ fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^{n-1}$).*

*Alors $f^n = (f')^{(n-1)}$.*

## 2 Opérations

**Propriété**

*Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ $n$ fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur $I$, $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(i) *$f+g$ est $n$ fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur $I$ et*
$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}.$$

(ii) *$\lambda f$ est $n$ fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur $I$ et*
$$(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}.$$

(iii) ***Formule de Leibniz***

*$f \times g$ est $n$ fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur $I$ et*
$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

(iv) *Si $g$ ne s'annule pas sur $I$, $\dfrac{f}{g}$ est $n$ fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur $I$.*

(v) *Si $h : J \to \mathbb{R}$, tel que $f(I) \subset J$ est $n$ fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur $J$, $f \circ g$ est $n$ fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur $I$.*

**Propriété : Fonctions usuelles**

*Les fonctions usuelles* exp, sin, cos, tan, ln, ch, sh, th, Arctan *et polynomiales ou rationnelles sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition.*

*Les fonctions* Arcsin *et* Arccos *sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.*

*$\sqrt{\cdot}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.*

## 3 $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes (HP)

**Définition : $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes (HP)**

$f : I \to J$ est un **$\mathscr{C}^k$-difféomorphisme** lorsque

- $f$ est bijective,
- $f$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I$,
- $f^{-1}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $J$.

**Propriété : Caractérisation (HP)**

*Soit $f : I \to J$ bijective de classe $\mathscr{C}^k$ avec $k \geqslant 1$.*

*Alors $f$ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme (ie $f^{-1}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $J$) si et seulement si $f'$ ne s'annule pas sur $I$.*

# III Applications

## 1 Condition nécessaire d'extremum local

**Définition : Extremum local**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$.

(i) On dit que $f$ admet **un minimum** (respectivement **maximum**) **local** en $a$ lorsqu'il existe un voisinage $V$ de $a$ tel que $\forall x \in I \cap V$, $f(x) \geqslant f(a)$ (respectivement $f(x) \leqslant f(a)$).

(ii) On dit que $f$ admet **un minimum** (respectivement **maximum**) **local strict** en $a$ lorsqu'il existe un voisinage $V$ de $a$ tel que $\forall x \in I \cap V$, $f(x) > f(a)$ (respectivement $f(x) < f(a)$).

On parle alors d'**extremum local**.
Lorsque $V = \mathbb{R}$, on parle d'**extremum global**.

**Définition : point critique**

Si $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \mathring{I}$ tel que $f$ dérivable en $a$. On dit que $a$ est un **point critique** de $f$ lorsque $f'(a) = 0$.

**Propriété : Condition nécessaire d'extremum local**

*Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ tel que*

**H1** $a \in \mathring{I}$

**H2** *$f$ est dérivable en $a$*

**H3** *$f$ admet un extremum local en $a$*

*Alors $a$ est un pont critique de $f$ : $f'(a) = 0$.*
*La réciproque est fausse.*

## 2 Théorème de Rolle

**Théorème : Théorème de Rolle**

*Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si*

**H1** *$f$ est continue sur $[a,b]$*

**H2** *$f$ est dérivable sur $]a,b[$*

**H3** $f(a) = f(b)$

*Alors $\exists\, c \in ]a,b[, \quad f'(c) = 0$.*

## 3 Théorème des accroissements finis

**Théorème : Théorème des accroissements finis**

*Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si*

**H1** *$f$ est continue sur $[a,b]$*

**H2** *$f$ est dérivable sur $]a,b[$*

*Alors $\exists\, c \in ]a,b[, \quad f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ie $f(b) = f(a) + (b-a)f'(c)$.*

## 4 Inégalité des accroissements finis

**Théorème : Inégalité des accroissements finis**

*Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si*

**H1** *$f$ est continue sur $[a,b]$*

**H2** *$f$ est dérivable sur $]a,b[$*

**H3** $\exists\, m, M \in \mathbb{R}, \quad \forall\, x \in ]a,b[, \quad m \leqslant f'(x) \leqslant M$

*Alors $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$.*

**Corollaire**

*Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Si*

**H1** *$f$ est continue sur $I$*

**H2** *$f$ est dérivable sur $\mathring{I}$*

**H3** $\exists\, k \in \mathbb{R}, \quad \forall\, x \in \mathring{I}, \quad |f'(x)| \leqslant k$

*Alors $f$ est $k$-lipschitzienne sur $I$, c'est-à-dire*

$$\forall\, x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|.$$

## 5 Variation des fonctions dérivables

**Théorème**

*Soit $f : I \to \mathbb{R}$, continue sur $I$, dérivable sur $\mathring{I}$.*

*(i) $f$ est constante sur $I$ si et seulement si $f' \equiv 0$ sur $\mathring{I}$.*

*(ii) $f$ est croissante (respectivement décroissante) sur $I$ si et seulement si $f' \geqslant 0$ (respectivement $f' \leqslant 0$) sur $\mathring{I}$.*

*(iii) $f$ est strictement croissante (respectivement décroissante) sur $I$ si et seulement si $f' \geqslant 0$ (respectivement $f' \leqslant 0$) sur $\mathring{I}$ et $\left\{x \in \mathring{I} \;\middle|\; f'(x) = 0\right\}$ ne continent aucun intervalle d'intérieur non vide ie $f'$ ne s'annule qu'en des points isolés.*

## 6 Théorème de la limite de la dérivée

**Théorème : Théorème de la limite de la dérivée**

*Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ tel que*

**H1** *$f$ est dérivable sur $I \setminus \{a\}$*

**H2** *$f$ est continue en $a$*

**H3** $f'(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

*Alors* $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

*Donc*

- *soit $\ell = \pm\infty$ et $\mathscr{C}_f$ admet une tangente verticale en $a$,*
- *soit $\ell \in \mathbb{R}$ et $f$ est dérivable en $a$, $f'(a) = \ell$ et $f'$ est continue en $a$.*

**Théorème**

*Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, et $f \in \mathscr{C}^k(I \setminus \{a\})$ telle que $\forall\, i \in [\![0,k]\!]$, $f^{(i)}$ a une limite finie en $a$. Alors le prolongement de $f$ par continuité en $a$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I$.*

## 7 Intégration sur un segment d'une fonction continue par morceaux

L'idée de la construction de l'intégrale d'une fonction par morceau consiste à commencer par définir celle de fonctions en escalier (somme des aires des rectangles) puis grâce au fait que toute fonction continue par morceaux est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier, d'en déduire que si $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$, $\left\{\int_{[a,b]} \varphi \,;\, \varphi \in \mathscr{E}([a,b]), \varphi \leqslant f\right\}$ et $\left\{\int_{[a,b]} \psi \,;\, \psi \in \mathscr{E}([a,b]), \psi \geqslant f\right\}$ admettent respectivement une borne supérieure et inférieure, égales. On a alors la définition :

**Définition**

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$. On définit

$$\int_{[a,b]} f = \sup_{\substack{\varphi\in\mathscr{E}([a,b])\\ \varphi\leqslant f}} \int_{[a,b]} \varphi = \inf_{\substack{\psi\in\mathscr{E}([a,b])\\ \psi\geqslant f}} \int_{[a,b]} \psi.$$

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{C})$. Alors $\mathfrak{Re}\, f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$, $\operatorname{Im} f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$ et on pose

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathfrak{Re}\, f + \mathrm{i}\int_{[a,b]} \mathfrak{Im}\, f$$

**Notation**

Pour $f \in \mathscr{C}_m([a,b])$, on note $\int_a^b f = \int_{[a,b]} f$, $\int_b^a f = -\int_a^b f = -\int_{[a,b]} f$ et $\int_a^a f = 0$.

On note aussi $\int_a^b f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

**Propriétés**

*Si $I$ intervalle, $a,b \in I$ (non nécessairement ordonnés).*

(i) $\left|\begin{array}{ccc} \mathscr{C}_m(I) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \int_a^b f \end{array}\right.$ *est linéaire.*

(ii) *Si $a \leqslant b$, $f \leqslant g \Longrightarrow \int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.*
*Si $b \leqslant a$, $f \leqslant g \Longrightarrow \int_a^b f \geqslant \int_a^b g$.*

(iii) ⚠ *En général, si $a,b \in I$ et $f \in \mathscr{C}_m(I)$,*

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \left|\int_a^b |f|\right|$$

(iv) *Si $a,b,c \in I$ et $f \in \mathscr{C}_m(I)$, $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.*

**Propriété : Positivité améliorée**

*Si $f$ est **continue** sur $\overleftrightarrow{[a,b]}$ et **de signe constant**,*

$$\int_a^b f = 0 \Longleftrightarrow f \equiv 0 \text{ sur } [a,b]$$

*C'est faux si $f$ est seulement continue par morceaux.*

**Propriété : Inégalité de Cauchy-Schwarz**

*Si $f,g \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$,*

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$$

*avec égalité si et seulement si $(f,g)$ est liée.*

## 8 Sommes de Riemann

**Définition**

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b])$, $\sigma = (a_0,\dots,a_n)$ subdivision de $[a,b]$ et pour $k \in [\![0,n-1]\!]$, $\xi_k \in [a_k,a_{k+1}]$. On appelle **somme de Riemann associée à $f$, $\sigma$ et $(\xi_k)_k$** :

$$S(f,\sigma,\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1}-a_k) f(\xi_k)$$

**Théorème**

*Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b])$.*

(i) *$h(\sigma)$ désignant le pas de $\sigma$,*

$$S(f,\sigma,\xi) \xrightarrow[h(\sigma)\to 0]{} \int_a^b f.$$

(ii) *Si, de plus, $f$ est $K$-lipschitzienne,*

$$\left|S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f\right| \leqslant K(b-a)h(\sigma).$$

**Corollaire**

*Si $f$ est continue par morceaux sur $[a,b]$, $a<b$,*

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f.$$

*En particulier, si $a=0$ et $b=1$, $f \in \mathscr{C}_m([0,1])$,*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f.$$

## 9 Intégrale et primitive

$I$ désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points.

**Propriété**

*Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $F, G$ deux primitives de $f$ sur $I$, avec $I$ **intervalle**.*
*Alors on a $C \in \mathbb{K}$ tel que $\forall x \in I$, $F(x) = G(x) + C$.*

**Théorème : fondamental de l'Analyse**

*Si $f$ est continue sur un intervalle $I$ et $a \in I$, $F : x \mapsto \int_a^x f$ est l'unique primitive de $f$ qui s'annule en $a$.*

**Corollaire**

*(i) Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.*

*(ii) Si $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$, $F$ primitive de $f$ sur $I$, $a, b \in I$,*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

*(iii) Si $f$ est de classe $\mathscr{C}^1([a,b])$, $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$.*

*(iv) **Inégalité des accroissements finis** : Si $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et $f'$ bornée par $k$, alors $f$ est $k$-lipschitzienne sur $[a,b]$.*

**Propriété**

*Soient $I, J$ intervalles de $\mathbb{R}$, $u, v : I \to J$ dérivables, $f : J \to \mathbb{K}$ continue.*

*L'application $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$ est dérivable sur $I$ et*

$$\forall x \in I, \quad \varphi'(x) = v'(x) f(v(x)) - u'(x) f(u(x)).$$

**Propriété**

*Si $u, v$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I$,*

$$\forall a, b \in I, \quad \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

**Propriété**

*Si $I$ intervalle, $\varphi : [\alpha, \beta] \to I$ de classe $\mathscr{C}^1$, $f$ continue sur $I$,*

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

## 10 Calcul de primitives et d'intégrales (Rappels)

### Méthode : Technique de calcul de primitives et d'intégrales

**a Calculs directs**

Il est bien entendu indispensable de connaître ses primitives usuelles (cf formulaire).

On reconnaît souvent une forme $u' \times v'(u)$ qui s'intègre en $v \circ u$ (voir aussi le changement de variable)

On peut parfois passer par les complexes : par définition, la partie réelle (imaginaire) de la primitive est la primitive de la partie réelle (imaginaire).

**b L'intégration par parties**

**Fonction dont la dérivée est plus simple...** ...comme par exemple les fonctions $\ln, \mathrm{Arccos}, \mathrm{Arcsin}, \mathrm{Arctan}$, etc.

**Abaissement du degré, formule de récurrence**

**c Le changement de variable**

**On veut calculer $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$** : C'est en fait le cas où on reconnaît une forme $\varphi' \times f \circ \varphi$.

**On veut calculer $\int f(x)\,\mathrm{d}x$**

Dans ce cas, il faut écrire $x = \varphi(t)$ avec $\varphi$ de classe $\mathscr{C}^1$. Mais attention, si on fait un calcul de primitive, il faudra choisir $\varphi$ **bijective** pour pouvoir à la fin du calcul revenir de $t$ à $x$ ($t = \varphi^{-1}(x)$). Si c'est un calcul d'intégrale avec des bornes, $\varphi$ n'a pas besoin d'être bijective ! (on en revient pas à la première variable.)

Comment déterminer un bon changement de variable ? Pas toujours facile, mais voici quelques tuyaux pour y parvenir.

**d Les fractions rationnelles**

Parfois, un simple changement de variable, ou des astuces du type $+1-1$ permettent de calculer les primitives.

Si ce n'est pas possible de simplifier « à vue », l'idée est de se ramener à des fractions simples pour utiliser, si $a \in \mathbb{R}$, sur $]a, +\infty[$ ou $]-\infty, a[$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{(n-1)(t-a)^{n-1}} + C \text{ si } n \neq 1$$

$$\int \frac{1}{x-a}\,\mathrm{d}x = \ln|t-a| + C.$$

Pour se faire on procède à une **décomposition en éléments simples**. Ne pas oublier la partie entière si elle est non nulle.

Il y a un autre cas à traiter : c'est celui pour lequel on obtient un facteur $ax^2 + bx + c$ au dénominateur sans racine réelle : cela donne dans la décomposition un terme en $\dfrac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c}$, qui se primitive en $\ln$ et $\mathrm{Arctan}$ :

- On se débarrasse du $x$ au numérateur en faisant apparaître la dérivée $2ax + b$ du dénominateur et on intègre en $\ln$,
- on met sous forme canonique le dénominateur du terme restant et on intègre en $\mathrm{Arctan}$.

**e Les fonctions trigonométriques**

Si on veut intégrer une fonction polynomiale en $\cos x$ et $\sin x$, le plus simple est de linéariser. Cependant, si on a un terme en $\sin^p x \cos^q x$ avec $p$ ou $q$ impair, on peut poster $t = \cos x$ si $q$ est impair et $t = \sin x$ si $p$ est impaire en utilisant $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

Si on veut intégrer une fraction rationnelle en $\cos x$ et $\sin x$, on applique :

**Règles de Bioche**

Si « $f(x)\mathrm{d}x$ » est invariant par

- $x \mapsto -x$, on pose $t = \cos x$ ;
- $x \mapsto \pi - x$, on pose $t = \sin x$ ;
- $x \mapsto \pi + x$, on pose $t = \tan x$ ;
- Sinon on pose $t = \tan \frac{x}{2}$.

Ne pas oublier le $\mathrm{d}x$ !!

**f Les fonctions hyperboliques**

Pour les fonctions faisant intervenir $\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \mathrm{th}$ et $\exp$, on peut poser $t = \mathrm{e}^x$ ($\mathrm{ch}\,x = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$, $\mathrm{sh}\,x = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$, $\mathrm{th}(x) = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$.)

Si l'on a une fraction rationnelle en $\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \mathrm{th}$, il peut être plus efficace d'appliquer un changement de variable obtenu grâce aux règles de Bioche appliquées à la fraction rationnelle dans laquelle on aura remplacé mentalement $\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \mathrm{th}$ par $\cos, \sin, \tan$ respectivement.

**g Les fonctions avec radical**

- Si l'on souhaite intégrer une fraction rationnelle en $x$ et $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ ($x$ et $\sqrt{ax+b}$ en particulier), on pose $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.
- Si l'on souhaite intégrer une fraction rationnelle en $x$ et $\sqrt{ax^2+bx+c}$ ($a \neq 0$), il faut mettre ce dernier sous forme canonique pour obtenir du $\sqrt{\pm(\alpha x+\beta)^2 \pm 1}$ puis poser $t=\alpha x+\beta$. Ensuite, pour :
  - ⋆ $\sqrt{t^2+1}$ on pose $t=\mathrm{sh}\, u$ ($\mathrm{sh}^2+1=\mathrm{ch}^2$) ou $t=\tan u$ ($1+\tan^2=\frac{1}{\cos^2}$, attention à l'intervalle dans ce cas là.)
  - ⋆ $\sqrt{t^2-1}$ on pose $t=\pm \mathrm{ch}\, u$ suivant le signe de $t$. ($\mathrm{ch}^2-1=\mathrm{sh}^2$.)
  - ⋆ $\sqrt{1-t^2}$ on pose $t=\sin u$ ou $t=\cos u$ ($1-\cos^2=\sin^2$ et $1-\sin^2=\cos^2$.)

# IV FORMULES DE TAYLOR

**Définition**

Si $f$ est $n$ fois dérivable en $a$, son **développement de Taylor** en $a$ à l'ordre $n$ est

$$T_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

et le **reste de Taylor** de $f$ en $a$ à l'ordre $n$ est $R_n=f-T_n$ (tel que $f=T_n+R_n$).

On sait déjà que si $f$ est polynomiale de degré $d$, pour tout $n \geqslant d+1$, $R_n \equiv 0$.

On va chercher à :

- exprimer **globalement** $R_n$ : c'est la formule de Taylor avec reste intégral,
- majorer **globalement** $R_n$ : c'est l'inégalité de Taylor-Lagrange,
- dominer **localement** $R_n$ : c'est la formule de Taylor-Young.

## 1 Taylor reste intégrale

**Théorème**

*Si $f$ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}(I)$, $a \in I$, alors pour tout $x \in I$,*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)+\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}\, \mathrm{d}t.$$

## 2 Inégalité de Taylor-Lagrange

**Théorème**

*Soit $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I)$, $a \in I$. Pour tout $x \in I$,*

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in[a, x]}\left|f^{(n+1)}(t)\right|.$$

**Corollaire**

*Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}=\mathrm{e}^z$.*

## 3 Formule de Taylor-Young

**Propriété : Primitivation de DL**

*Soit $f: I \rightarrow E$ admettant un DL$_n(a)$ avec $a \in I$*

$$f(x)=a_0+\cdots+a_n(x-a)^n+\mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

*Toute primitive $F$ de $f$ sur $I$ admet un DL$_{n+1}(a)$*

$$F(x)=\boldsymbol{F(a)}+a_0(x-a)+\frac{a_1}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}+\mathrm{o}\left((x-a)^{n+1}\right)$$

*obtenu par primitivation terme à terme du DL de $f$.*

**Théorème : Formule de Taylor-Young**

*Si $f \in \mathscr{C}^n(I)$, $a \in I$, alors $f$ admet un DL$_n$ en $a$*

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

*ie*

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\mathrm{o}\left(h^n\right)$$

⚠ *La réciproque est fausse : l'existence d'un DL$_n$ en $a$ n'implique pas en général que $f$ est $n$ fois dérivable en $a$ si $n \geqslant 2$.*